Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет»

О. С. Лехов, М. Ю. Туев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Допущено Научно-методическим советом по общетехническим дисциплинам Учебно-методического объединения по профессионально-педагогическому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 051000 Профессиональное обучение (по отраслям), профилям подготовки «Машиностроение и материалообработка», «Транспорт», «Металлургия», «Энергетика»

Екатеринбург
РГППУ
2015

УДК 531(075.8)
ББК В21я73-1
Л53

Лехов, Олег Степанович.

Л53 Теоретическая механика: учебное пособие / О. С. Лехов, М. Ю. Туев. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2015. 137 с.

ISBN 978-5-8050-0547-4

Изложены основные теоретические положения по некоторым разделам курса «Теоретическая механика» («Статика твердого тела», «Кинематика точки и твердого тела», «Динамика точки», «Динамика системы и твердого тела»), приведены решения типовых задач и задания для выполнения контрольных работ.

Пособие предназначено для студентов инженерно-педагогических специальностей машиностроительного и энергетического профиля.

УДК 531(075.8)
ББК В21я73-1

Рецензенты: д-р техн. наук, доц. Е. Ю. Раскатов (ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого президента России Б. Н. Ельцина»); д-р техн. наук, проф. В. В. Каржавин (ФГАОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»); канд. техн. наук, доц. А. А. Карпов (ФГАОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»)

ISBN 978-5-8050-0547-4

Введение

Теоретическая механика рассматривает наиболее общие понятия, законы, методы и принципы, присущие всем областям механики. Это наука о механическом движении и взаимодействии тел.

Под механическим движением понимают происходящее с течением времени изменение положения материальных тел в пространстве. Под механическим взаимодействием подразумевают те действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел. За основную меру этих взаимодействий принимают величину, называемую силой.

В основе различных механик (жидкостей, газов, твердых деформируемых тел и т. д.) лежат законы классической механики Галилео Галилея (1564–1642) и Исаака Ньютона (1643–1727), изданные в 1687 г. в сочинении И. Ньютона «Математические начала натуральной философии». Сам термин «механика» принадлежит Аристотелю (384–322 гг. до н. э.) и происходит от греческого «mechane» – сооружение, машина. Л. Эйлер (1707–1783), Ж. Даламбер (1717–1783), Ж. Лагранж (1736–1813), М. В. Ломоносов (1711–1765), М. В. Остроградский (1801–1861), П. Л. Чебышев (1821–1894), И. В. Мещерский (1859–1935), Н. Е. Жуковский (1847–1921) и другие исследователи заложили основу той механики, из которой выросли все общетехнические дисциплины.

Теоретическая механика – одна из важнейших физико-математических дисциплин, изучаемых не только в вузах, но и в средних специальных учебных заведениях. На ее основных законах базируются многие общеинженерные и теоретические дисциплины, такие как сопротивление материалов, теория машин и механизмов, детали машин, теория упругости, внешняя и внутренняя баллистика и т. д. Хорошее знание курса теоретической механики требует не только глубокого усвоения теории, но и умения грамотно поставить задачу, решить ее, проанализировать результаты и, при необходимости, выбрать оптимальный вариант решения.

Данное учебное пособие адресовано студентам инженерно-педагогических специальностей машиностроительного и энергетического профиля. Оно поможет им наиболее детально разобраться в таких разделах курса

«Теоретическая механика», как «Статика твердого тела», «Кинематика точки твердого тела» и «Динамика системы твердого тела».

В данном учебном пособии в краткой и доступной форме изложены теоретические положения основных разделов курса «Теоретическая механика», в некоторых главах приведены примеры решения типовых задач и контрольные задачи для самостоятельного выполнения. Решения задач сопровождаются рядом указаний, которые должны помочь студентам при их самостоятельной работе.

После основного текста работы приводятся общие указания по самостоятельному выполнению контрольных работ, содержащие рекомендации по их подготовке и написанию, а также требования к выбору индивидуального варианта контрольной работы.

Часть I. СТАТИКА

Статика – раздел механики, изучающий условия покоя и равновесия материальных тел и включающий в себя учение о силах взаимодействия между телами.

Большинство инженерных сооружений можно считать малодеформируемыми или абсолютно твердыми. Принимают, что расстояния между точками таких тел не изменяются с течением времени.

В статике абсолютно твердого тела решаются две задачи:

1) сложение сил и приведение системы сил к простейшему виду;

2) определение условий равновесия.

Перечислим основные понятия статики [4].

Количественная мера механического взаимодействия материальных тел (объектов) – *сила* – определяется тремя главными характеристиками: величиной, направлением действия и точкой ее приложения. Опытным путем установлено, что введенная таким образом величина имеет векторные свойства. В Международной системе единиц СИ единицей измерения силы является ньютон (Н).

Совокупность сил, действующих на какое-либо тело (или систему тел), называется *системой сил*.

Тело, не скрепленное с другими телами, которому можно сообщить движение в любом направлении, именуется *свободным*. В противном случае оно будет представлять собой *несвободное* твердое тело. Тела, ограничивающие свободу данного тела, являются по отношению к нему *связями*. Силы взаимодействия связей с рассматриваемым телом будут *реакциями связей*.

Система сил, полностью заменяющая другую систему сил, действующую на свободное тело, не изменяя при этом состояния движения или покоя, называется *эквивалентной*. Система сил, под действием которой тело может находиться в состоянии покоя, носит название *эквивалентной нулю* или *уравновешенной*.

Одна сила, эквивалентная системе сил, именуется ее *равнодействующей*. Одна сила, равная по величине равнодействующей, но противоположно ей направленная, носит название *уравновешивающей* для исходной системы сил.

Силы, действующие между частицами одного тела, называются *внутренними*, а действующие со стороны других тел – *внешними*.

Глава 1. Основные понятия и исходные положения статики

1.1. Основные понятия и задачи статики

Под *абсолютно твердым телом* понимается тело, в котором расстояние между двумя любыми точками неизменно [4].

Сила есть мера механического взаимодействия между телами [4].

Сила – векторная величина. Обозначается буквами с чертой $\overline{F}$, $\overline{P}$, $\overline{Q}$ и т. д.

Вектор (сила) определяется тремя компонентами:

- точкой приложения;
- направлением (α, β, γ);
- величиной ((модулем) $\left|\overline{F}\right|$, $\left|\overline{P}\right|$).

Сила считается *сосредоточенной* в случаях, если она действует в точку. Если же сила действует на площадь или по длине, ее называют *распределенной*.

Прямая линия, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*.

Система сил – это совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело. Если линии действия сил лежат в одной плоскости, то систему называют *плоской*, а если линии действия не лежат в одной плоскости – *пространственной* системой сил. Кроме того, силы, линии действия которых пересекаются, называют *сходящимися*, а силы, линии действия которых параллельны друг другу – *параллельными*.

Если одну систему сил, действующих на тело, заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения тела, то полученные системы определяют как *эквивалентные*.

Система сил, под действием которой тело находится в покое, называется *уравновешенной*. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта эквивалентная сила именуется *равнодействующей*. Сила, равная по модулю, но противоположная по направлению равнодействующей силе, носит название *уравновешивающей*.

Силы, действующие на тело со стороны других тел, называются *внешними*, а силы, с которыми одни части тела действуют на другие части тела, – *внутренними*.

Сила, приложенная к телу в какой-либо его точке, именуется *сосредоточенной*, а силы, действующие на все точки какой-либо части тела или его поверхности, называются *распределенными*. Если сила распределена равномерно на участке определенной длины, то при решении задач распределенную силу заменяют сосредоточенной, приложенной посередине этого участка. Величина такой сосредоточенной силы Q равна произведению распределенный силы q на длину участка l: $Q = ql$ (рис. 1.1).

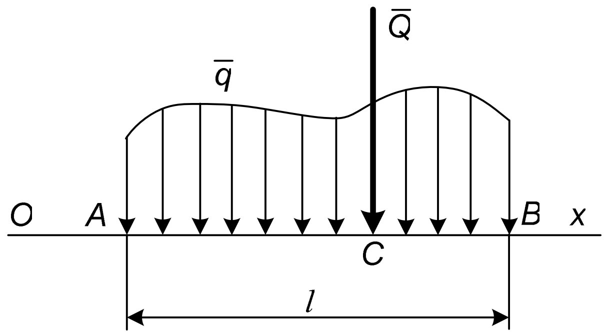


Рис. 1.1. Распределенная нагрузка

Основные задачи статики:

• преобразование систем сил в эквивалентные системы с целью приведения их к простейшему виду;

• определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

1.2. Аксиомы статики

В основе статики лежат экспериментально установленные аксиомы [4].

1.2.1. Аксиома о равновесии системы двух сил

Свободное абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил только в том случае, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной линии действия в противоположные стороны (рис. 1.2).

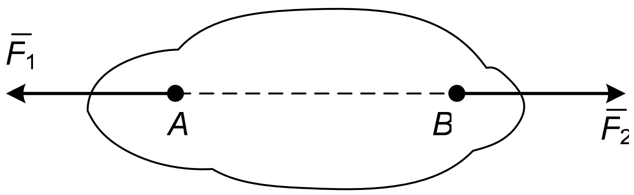


Рис. 1.2. Уравновешенная система сил

Иными словами, эти две силы образуют *уравновешенную систему сил*.

1.2.2. Аксиома о добавлении уравновешенной системы сил

Если к системе сил добавить (или отбросить) другую систему, эквивалентную нулю, то полученная система будет эквивалентна первой (рис. 1.3, *а*).

Следствие: силу можно переносить вдоль линии ее действия в пределах абсолютно твердого тела. В этом случае векторы, обозначающие силы, теряют свое наименование «приложенных» к определенной точке и становятся «скользящими» (рис. 1.3, *б*).

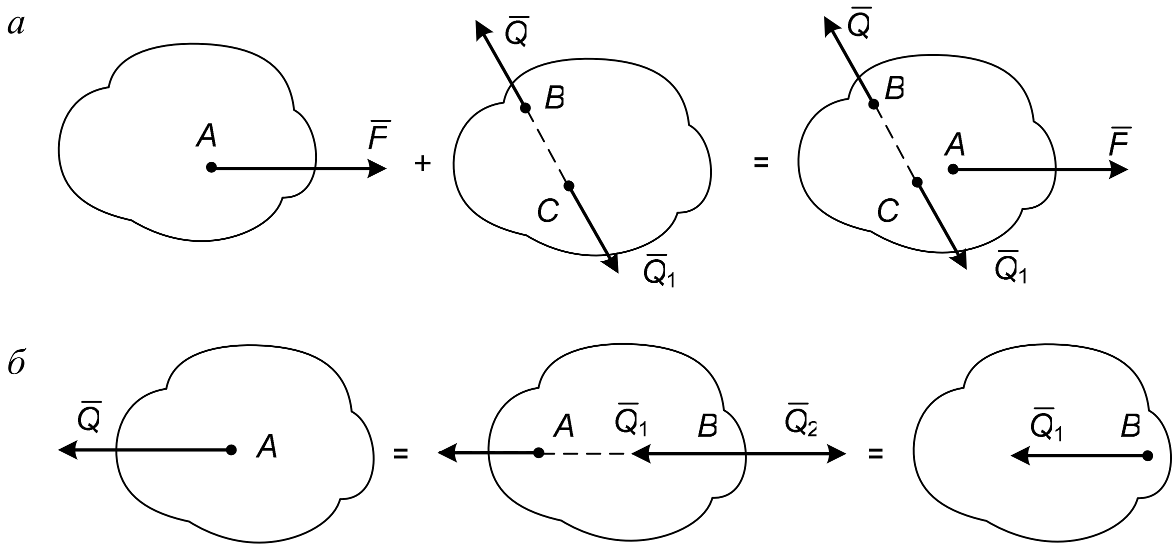


Рис. 1.3. Системы сил:
а – эквивалентные системы сил; *б* – «скользящие» векторы сил

1.2.3. Аксиома параллелограмма сил

Совокупность сил, приложенных к одной точке, может быть заменена одной силой в соответствии с правилом параллелограмма или треугольника. И наоборот, одна сила может быть разложена на совокупность нескольких сил, приложенных в той же точке (рис. 1.4).

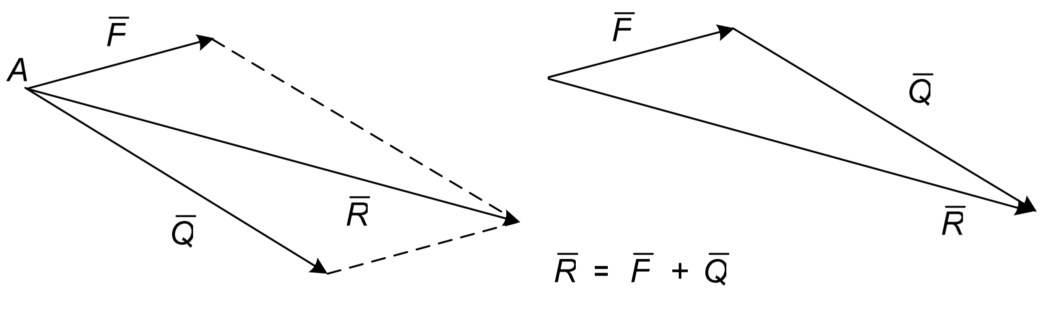


Рис. 1.4. Параллелограмм сил

1.2.4. Аксиома о равенстве сил действия и противодействия

Два тела взаимодействуют между собой с силами, равными по величине, противоположными по направлению и приложенными к различным взаимодействующим телам (рис. 1.5). На основе этой аксиомы строится метод решения задач, называемый *методом сечений*.

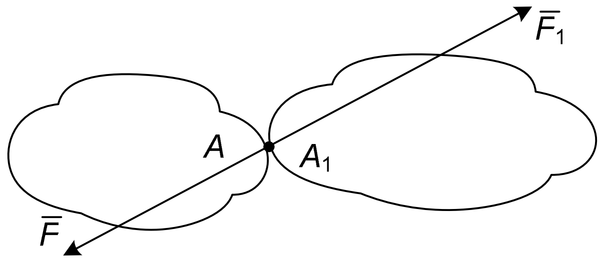


Рис. 1.5. Равенство сил действия и противодействия

1.2.5. Аксиома затвердевания

Если деформируемое тело находится в равновесии, то замена его или отдельных его частей соответствующими абсолютно твердыми телами не изменяет первоначального состояния равновесия. Условия равновесия абсолютно твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия деформируемого тела.

Приведем примеры гибких связей (рис. 1.6).

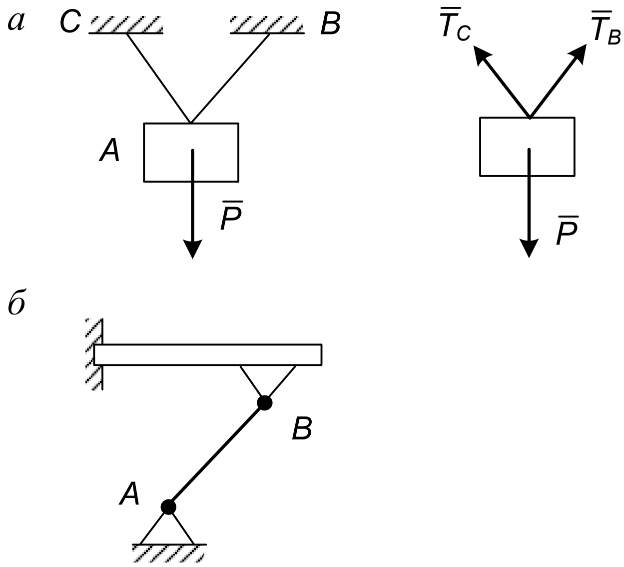


Рис. 1.6. Примеры гибких связей:
а – натянутые гибкие нити; *б* – стержни

Гибкие связи (нити, канаты, цепи) не дают телу перемещаться только в натянутом состоянии, поэтому *реакция гибкой связи всегда направлена в сторону от тела*. При этом гибкая связь, перекинутая через блок, изменяет только направление силы натяжения нити.

1.2.6. Аксиома освобождаемости от связей

Любое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей и заменить их действие соответствующими реакциями связей.

Большинство тел в природе являются несвободными, так как они соприкасаются с другими телами. *Связями* называют ограничения, налагаемые на свободу перемещения данного тела в пространстве [4]. Например: для тела, лежащего на столе, связью является поверхность стола; для лестницы, приставленной к стене, связями служат пол и стена; для вала, опирающегося на подшипники, связями являются подшипники и т. д.

Рассмотрим более подробно примеры связей и их реакций.

На рис. 1.7 представлены различные примеры связей и их реакций.

Сила, с которой тело действует на связь, называется *силой давления*; сила, с которой связь действует на тело – *силой реакции* или просто реакцией. Силы, действующие на тело, делятся на две группы: активные и реактивные. *Активные* – стремятся перемещать тело, *реактивные* – препятствуют перемещению. Активные силы еще называют нагрузками.

Одна из основных задач статики – определение реакций связей, поскольку их необходимо знать для расчета конструкций на прочность.

Направление реакции связи всегда противоположно направлению перемещения, ограниченного данной связью. Если считать связи идеально гладкими, то можно сразу определить направление реакции. Реакция со стороны отброшенной связи всегда *направлена по перпендикуляру к плоскости либо по нормали к поверхности в сторону тела*, так как не дает перемещаться телу в направлении опоры. Если со стороны одного тела контакт осуществляется по точке, то реакция направлена по перпендикуляру (нормали) к другому соприкасающемуся телу. Если контактируют две окружности или цилиндрические поверхности (вал в подшипниках, цилиндрический шарнир и т. п.), то неизвестна ни точка приложения реакции, ни ее величина; известно только, что реакция направлена радиально, при условии, что шарнир идеально гладкий.

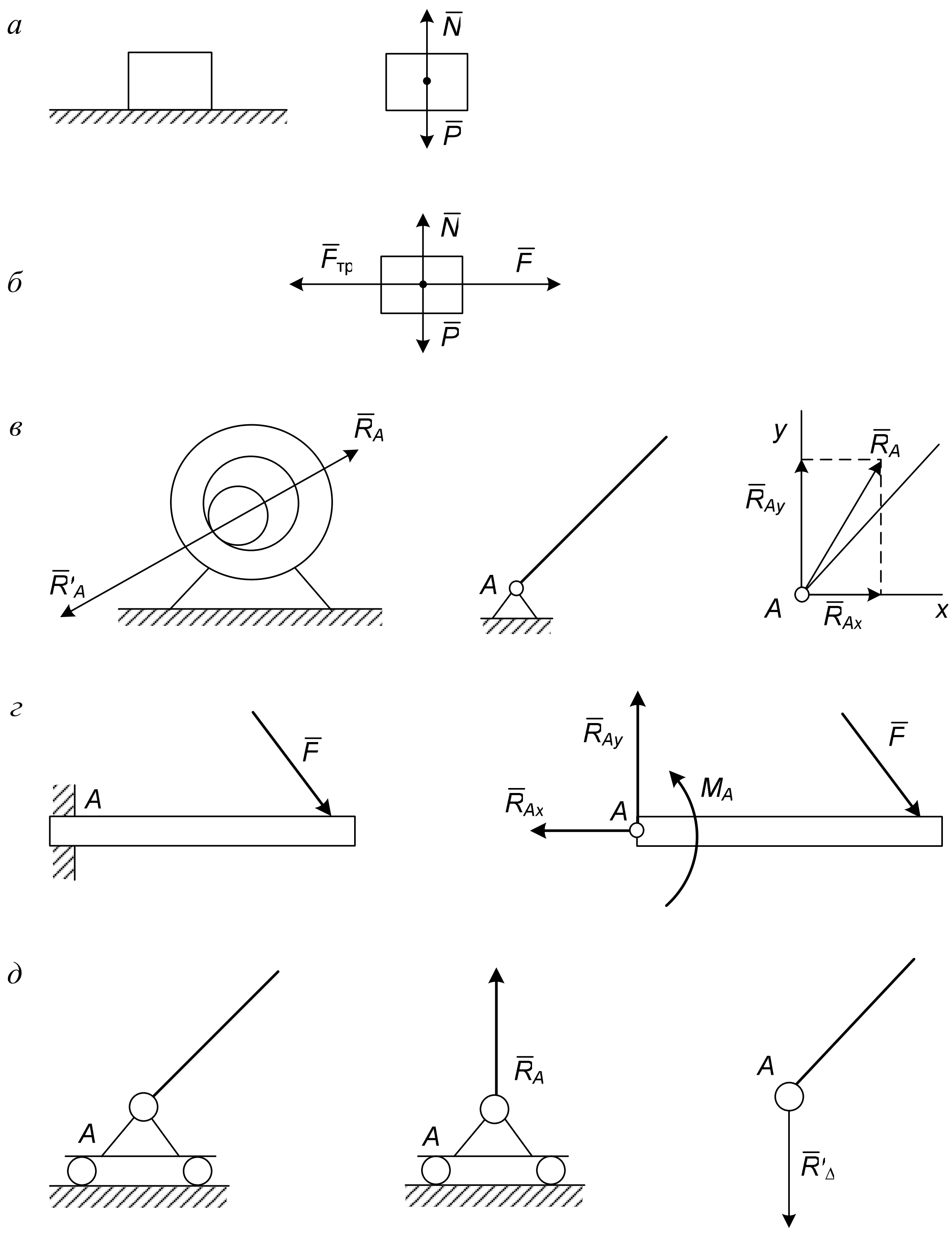


Рис. 1.7. Связи и их реакции:

а – идеально гладкая поверхность (контакт по поверхности); *б* – шероховатая поверхность (контакт по поверхности); *в* – неподвижная цилиндрическая шарнирная опора; *г* – жесткая заделка; *д* – подвижная цилиндрическая шарнирная опора (опора на каток)

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое система сил?
2. Какова суть параллелограмма сил?
3. Что такое распределенная нагрузка?
4. Опишите виды связей и их реакции.

Глава 2. Плоская система сил

2.1. Сложение и разложение сил. Проекция силы на ось

Если силы лежат в одной плоскости, то такую систему называют *плоской*. *Сходящейся* называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. В статике рассматриваются задачи сложения и разложения сил, а также задачи определения реакций [1, 4].

В соответствии с аксиомой сложения сил две силы, приложенные к одной точке, можно заменить одной – равнодействующей, которая определяется по правилу параллелограмма или силового треугольника. Обобщая это правило на случай k сил, приложенных в одной точке, получим:

$$\overline{R} = \sum_k \overline{F}_k,$$

где $\overline{R}$ – результирующий вектор;
k – индекс силы;
$\overline{F}_k$ – сила.

Решение задачи об определении суммы нескольких векторов (вектор $\overline{R}$) является единственным и не зависит от того, в каком порядке эти векторы складываются. При этом задача о разложении векторов не имеет единственного решения до тех пор, пока не заданы направления разложения сил.

Проекцией силы F_ξ на заданную ось (например, $O\xi$ (рис. 2.1)) называется скалярное произведение вектора силы $\overline{F}$ на единичный вектор $\overline{e}_\xi$, характеризующий положительное направление оси, т. е.

$$\overline{F}_\xi = Fe_\xi = \overline{F}\cos\alpha.$$

Угол α находится между положительным направлением оси $O\xi$, и направлением вектора силы $\overline{F}$. В том случае, когда $90° < \alpha < 270°$, проекция $F_\xi < 0$, так как $\cos\alpha < 0$. Модуль этой проекции удобно вычислять через угол β = 180° – α или α = 90° + γ. В соответствии с определением проекции силы $\bar{F}$ и скалярного произведения векторов можно записать следующее:

$$\bar{F}_\xi = \bar{F} \cdot \bar{e}_\xi = F\cos\alpha \cdot \bar{e}_\xi = -F\cos\beta \cdot \bar{e}_\xi = -F\cos\gamma \cdot \bar{e}_\xi .$$

При разложении силы $\bar{F}$ в пространстве ($\bar{F} = \bar{F}_{xy} + \bar{F}_z = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z$) часто встречаются два варианта.

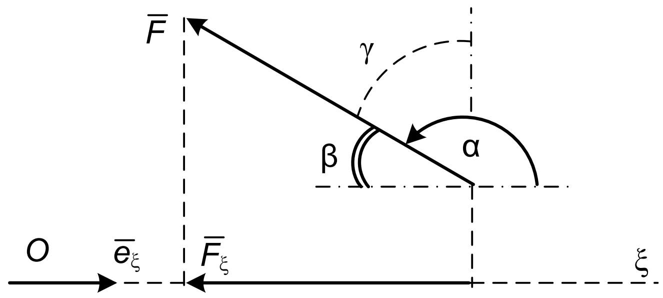


Рис. 2.1. Проекция силы на ось на плоскости

В первом случае (рис. 2.2, *а*) ориентация вектора задана двумя углами: α – между осью *Ox* и направлением составляющей силы $\bar{F}$, лежащей в плоскости *yOx*, и γ – между вектором $\bar{F}$ и его составляющей вдоль оси *Oz*.

$$\bar{F}_x = \bar{F}_{xy}\cos\alpha = \bar{F}\sin\gamma \cdot \cos\alpha,$$

$$\bar{F}_x = \bar{F}_{xy}\sin\alpha = \bar{F}\sin\gamma \cdot \sin\alpha,$$

$$\bar{F}_z = \bar{F}\cos\gamma.$$

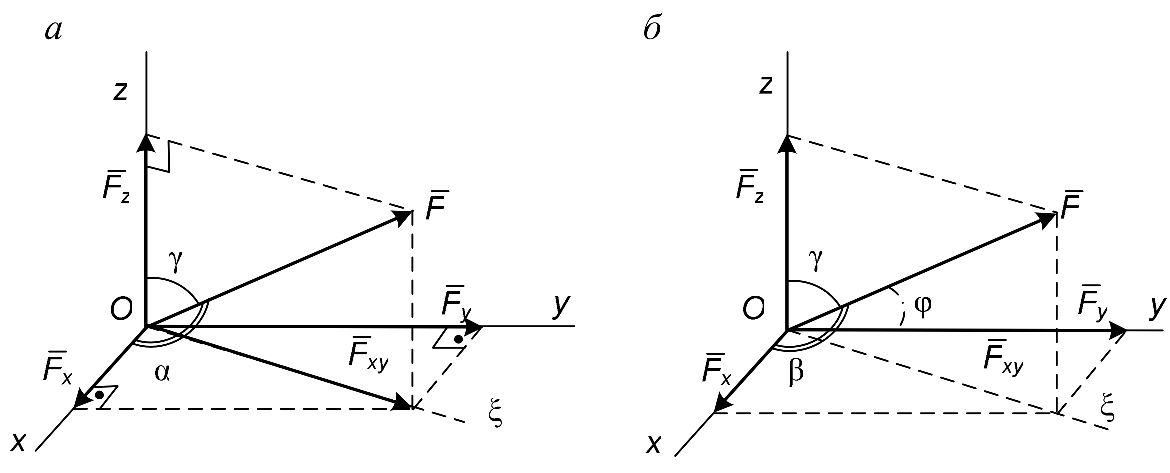


Рис. 2.2. Проекция силы на ось в пространстве

Во втором случае (рис. 2.2, *б*) положение вектора $\bar{F}$ определяется тремя углами между направлением этого вектора и положительными направлениями соответствующих осей (β, γ, φ). По определению проекции силы на ось получим:

$$F_x = \bar{F} \cdot \bar{i} = F\cos\beta,$$

$$F_y = \bar{F} \cdot \bar{j} = F\cos\varphi,$$

$$F_z = \bar{F} \cdot \bar{k} = F\cos\gamma.$$

2.2. Момент силы относительно точки на плоскости

Если к телу с закрепленной точкой приложить силу, линия действия которой не проходит через эту точку, то сила будет оказывать вращательное действие. Меру вращательного действия силы называют *моментом силы M*.

Момент силы характеризует способность силы вращать тело относительно какой-либо точки.

Алгебраический момент силы относительно данной точки на плоскости равен произведению модуля силы на кратчайшее расстояние от данной точки до линии действия силы (рис. 2.3) [4]. Это расстояние называют *плечом силы* h. Момент силы зависит от модуля и плеча силы, а также от положения плоскости поворота и направления поворота в этой плоскости и выражается формулой

$$M_O(\bar{F}) = \pm\bar{F} \cdot h = \pm F \cdot OA\sin\alpha.$$

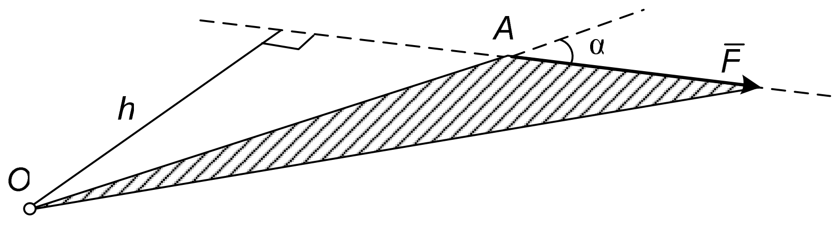


Рис. 2.3. Алгебраический момент силы относительно точки на плоскости

Условимся считать момент положительным, если он стремится вращать тело против часовой стрелки и отрицательным, если – по часовой.

Алгебраический момент силы равен нулю только в том случае, когда сила равна нулю или линия ее действия проходит через точку, относительно которой определяется момент.

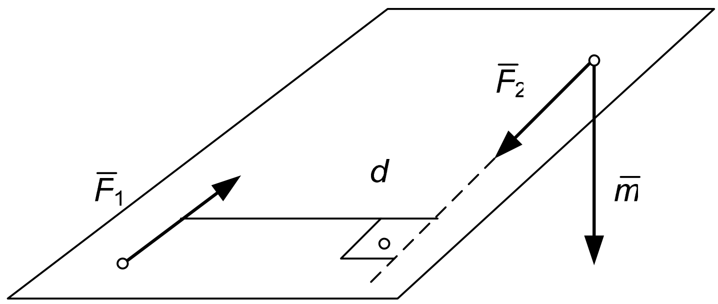
Момент силы не меняется при переносе силы вдоль линии ее действия.

2.3. Пара сил. Момент пары

Парой сил называется система двух равных, параллельных, но противоположных по направлению сил. Расстояние между линиями действия этих сил называется *плечом пары* d [4].

Пара сил, как и момент силы, стремится вращать тело. *Момент пары* m – это произведение одной из сил, составляющих пару, на ее плечо.

Пара сил – особый силовой фактор. Парой называются лежащие в одной плоскости две равные по модулю, не лежащие на одной прямой и противоположно направленные силы. Пара сил характеризуется моментом пары $m = Fd$, где величины сил, образующих пару, равны между собой: $\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = \overline{F}$ (рис. 2.4).



$$\left|\overline{F}_1\right| = \left|\overline{F}_2\right| = \left|\overline{F}\right|;$$
$$\overline{F}_1 \parallel \overline{F}_2$$

Рис. 2.4. Момент пары сил

Свойства пары сил.

1. Пара сил не имеет равнодействующей.

2. Пара сил не имеет конкретной точки приложения, а приложена ко всему телу в целом.

3. Сила, образующая пару, и плечо пары могут изменяться, но так, чтобы их произведение оставалось неизменным.

Вектор пары сил $\overline{m}$ направлен перпендикулярно плоскости, где лежат силы, образующие пару, в ту сторону, откуда пара стремится вращать материальное тело против часовой стрелки.

Условие равновесия плоской системы сил можно применить и к парам сил, а значит и к моментам. На основании третьего свойства пары сил несколько пар можно заменить одной, эквивалентной, приведя их моменты к одному плечу, на котором приложена равнодействующая. Таким образом, момент результирующей пары равен сумме моментов составляющих пар:

$$m = \Sigma m_i.$$

Сумма моментов принимается алгебраическая, т. е. с учетом знака (направления момента). Условие равновесия плоской системы пар сил записывается в следующем виде:

$$m = \Sigma m_i = 0.$$

Для равновесия плоской системы пар сил необходимо и достаточно, чтобы сумма их моментов равнялась нулю.

2.4. Теорема о параллельном переносе силы (лемма Пуансо)

Не изменяя действия силы на тело, силу можно переносить параллельно линии ее действия в любую точку данной плоскости, присоединяя при этом пару сил [4].

Приведем доказательство теоремы (рис. 2.5).

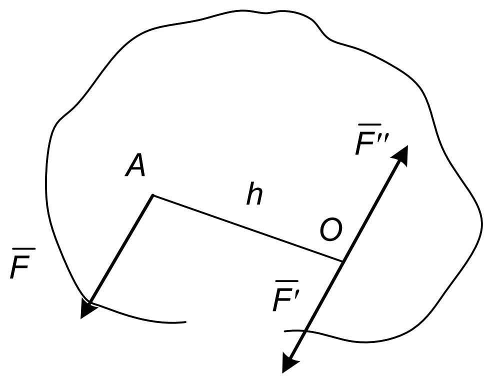


Рис. 2.5. Параллельный перенос силы в плоскости (теорема Пуансо)

Задана сила $\bar{F}$, приложенная в точке A. Возьмем точку O и приложим к ней две противоположно направленные силы $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные заданной силе и равные ей по модулю. Эти две силы, согласно аксиоме о равновесии, образуют уравновешенную систему двух сил, поэтому действие силы $\bar{F}$ эквивалентно действию трех сил: $\bar{F}$, $\bar{F}'$, и $\bar{F}''$.

Сила $\bar{F}'$ может рассматриваться как сила $\bar{F}$, перенесенная параллельно к своему первоначальному положению из точки A в точку O, а силы $\bar{F}$ и $\bar{F}''$ образуют пару сил с плечом h, которую необходимо присоединить, чтобы действие силы $\bar{F}$ на тело не изменилось при ее переносе. Теорема доказана.

2.5. Приведение системы сил к данному центру

Геометрическая сумма всех сил $\bar{F}_i$, расположенных произвольно на плоскости, называется *главным вектором* $\bar{F}_{гл}$ данной системы

$$\bar{F}_{гл} = \sum \bar{F}_i.$$

Алгебраическая сумма моментов M_O всех сил, расположенных произвольно на плоскости относительно какой-либо точки O, называется *главным моментом* $M_{гл}$ данной системы сил относительно этой точки

$$M_{гл} = \sum M_O(\bar{F}_i).$$

Вывод: всякую плоскую систему сил всегда можно заменить одной силой, равной главному вектору системы и приложенной в точке O, и главным моментом данной системы сил относительно той же точки.

Модуль и направление главного вектора не зависят от выбора точки приведения, так как силы переносятся параллельно их начальным направлениям. Наоборот, численное значение главного момента и его знак зависят от выбора точки приведения, поэтому всегда указывают точку, относительно которой определяется главный момент.

2.6. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Если плоская система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любой точки этой плоскости равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки [4].

Пусть на тело действует плоская система из n произвольных сил (рис. 2.6). Равнодействующая этих сил $\bar{R}$ равна

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_n \neq 0.$$

Чтобы уравновесить систему, приложим равную по величине и направленную по той же прямой, но в противоположную сторону силу $\bar{F}$ так, чтобы сумма моментов всех сил относительно любой точки O равнялась нулю:

$$\sum M_O(\bar{F}_n) + M_O(\bar{F}) = 0.$$

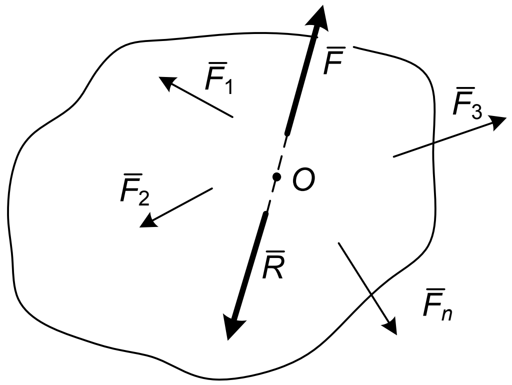


Рис. 2.6. Теорема о моменте равнодействующей

Поскольку силы $\bar{F}$ и $\bar{R}$ равны и направлены в противоположные стороны по одной прямой, то и моменты их равны и противоположны по знаку:

$$M_O(\bar{F}) = -M_O(\bar{R}).$$

Подставляя это равенство в предыдущее, получим

$$\sum M_O(\bar{F}_n) + M_O(\bar{R}) = 0.$$

Отсюда

$$M_O(\bar{R}) = \sum M_O(\bar{F}_n).$$

Теорема доказана.

2.7. Равновесие произвольной плоской системы сил

Запишем условия равновесия для плоской системы сходящихся сил: $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$ (алгебраическая форма записи), т. е. проекции всех сил на оси x и y равны нулю; $\bar{R} = 0$ (векторная форма записи), т. е. главный вектор равен нулю.

Запишем три условия равновесия для плоской системы сил:

1) $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$, $\Sigma M_A = 0$, – т. е. сумма проекций сил на оси x и y равна нулю и сумма моментов всех сил относительно любой точки плоскости равна нулю;

2) $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$, $\Sigma M_C = 0$, но точки A, B, C, не лежат на одной прямой;

3) $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$, $\Sigma x = 0$, но ось x не перпендикулярна прямой AB.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Каковы условия и уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил?
2. Дайте определение момента силы относительно точки.
3. Опишите условие и уравнение равновесия плоской системы сил.
4. Что такое системы сходящихся сил. Дайте определение силового многоугольника.
5. Дайте определение момента силы относительно центра (точки).
6. Дайте определение теоремы Вариньона о моменте равнодействующей.
7. Что такое пара сил?
8. Дайте определение момента пары сил.

Контрольная задача 2.1

Задача на равновесие твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, расположенных в плоскости [2]. Для ее решения надо рассмотреть равновесие соответствующего тела (блока или шара – условия 1 и 2 соответственно). К телу следует приложить активные (заданные) силы, затем применить принцип освобождаемости от связей, отбросив связи и заменив их действие на тело реакциями. Для нахождения искомых величин необходимо составить уравнения равновесия. Исходные данные приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра	Значения 2-й цифры шифра		Значения 3-й цифры шифра		
	Q, Н	Номер условия	Номер схемы (рис. 2.7)	Углы, град		
				α	β	γ
1	100	1	1	0	15	30
2	200	1	2	45	30	45
3	300	1	3	45	75	60
4	400	1	4	60	90	30
5	500	1	5	90	75	45
6	600	1	6	0	15	60
7	700	2	7	30	90	30
8	800	2	8	75	45	45
9	900	2	9	60	90	60
0	1000	2	10	90	75	30

Условия

1. На конструкции, состоящей из двух невесомых стержней *AB* и *AC*, скрепленных между собой и с опорами с помощью шарниров, укреплен в узле блок. Через блок перекинут невесомый канат, один конец которого прикреплен в точке *D*, а к другому подвешен груз *Q* (см. рис. 2.7, схемы 1–6). Определить усилия в стержнях, пренебрегая размерами блока. Задачу решить аналитическим и графическим способами.

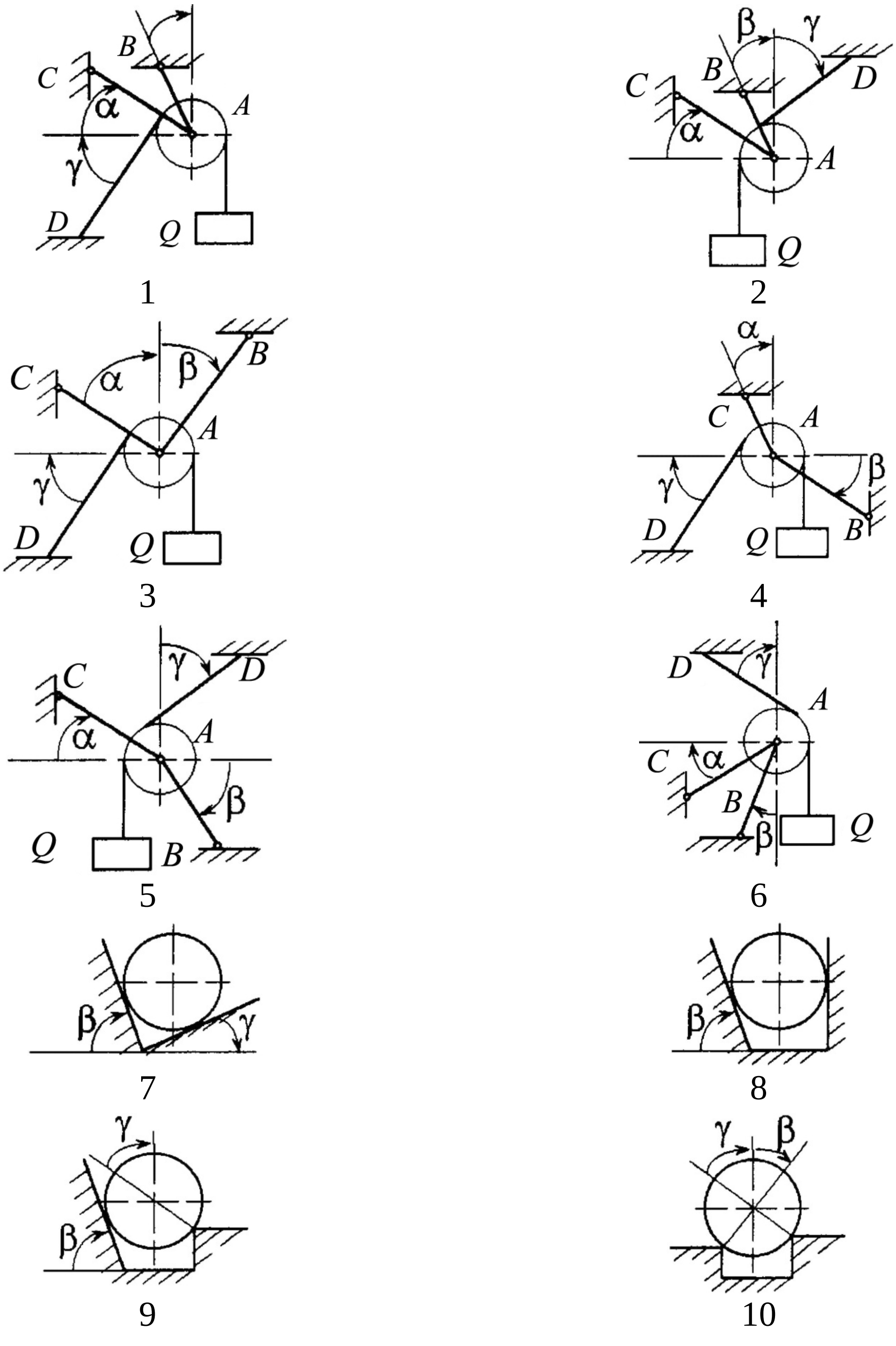


Рис. 2.7. Схемы к задаче 2.1

2. Определить давление однородного шара весом Q на опоры, если шар опирается на две гладкие плоскости (см. рис. 2.7, схемы 7–8), на гладкую плоскость и выступ (см. рис. 2.7, схема 9), на два выступа (см. рис. 2.7, схема 10). Задачу решить аналитическим и графическим способами.

Пример решения

Условие. На конструкции, состоящей из двух невесомых стержней AB и AC, скрепленных между собой и с опорами с помощью шарниров, закреплен в узле A блок. Через блок перекинут невесомый канат, один конец которого прикреплен в точке D, а к другому подвешен груз Q. Определить усилия в стержнях, пренебрегая размерами блока. Задачу решить аналитическим и графическим способами. Схема конструкции приведена на рис. 2.7, схема 2, $\alpha = 150°$, $Q = 600$ Н.

Аналитический способ решения. Изобразим блок A, пренебрегая его размерами (рис. 2.8).

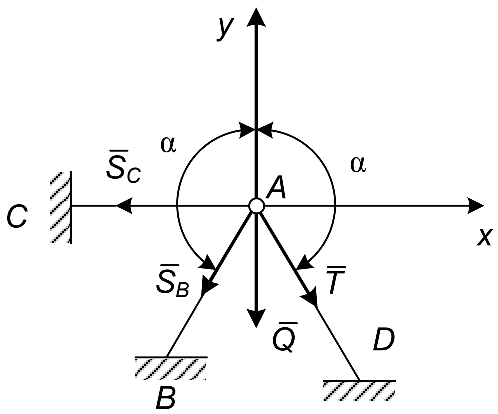


Рис. 2.8. Схема решения задачи 2.1 аналитическим способом

К нему приложены заданная сила тяжести подвешенного груза Q и реакции стержней AB (S_B), AC (S_C), сила натяжения каната $\overline{T}$. При отсутствии трения в блоке сила натяжения каната, перекинутого через блок, одинакова во всех точках, поэтому модуль силы натяжения каната $\overline{T}$ равен модулю силы тяжести груза Q, а направление этой реакции гибкой связи – вдоль каната от A к D.

Реакции стержней направим вдоль стержней в произвольную сторону, например от узла A. Для нахождения проекций сил изобразим оси координат. Для узла A, находящегося в равновесии под действием системы четырех сходящихся сил, расположенных в плоскости, составим два уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил на оси координат и решим их.

Получим

$$\Sigma F_{ix} = 0;\ -S_C - S_B\cos 60° + T\cos 60° = 0;$$
$$\Sigma F_{ix} = 0;\ -S_B\cos 30° - Q - T\cos 30° = 0.$$

Из второго уравнения найдем

$$S_B = -\left(1 + \frac{1}{\cos 30°}\right) = -1293\ \text{Н}.$$

Подставив выражение для S_B в первое из уравнений равновесия, получим $S_C = Q\cos 60°\left(2 + \dfrac{1}{\cos 30°}\right) = 964$ Н.

Знак минус у найденной реакции S_B означает, что истинное направление этой реакции противоположно выбранному, т. е. она направлена от B к A, и, следовательно, стержень AB сжат. Стержень AC в соответствии с направлением реакции S_C растянут.

Графический (геометрический, графоаналитический) способ решения [4]. Этот способ основан на построении замкнутого силового многоугольника (в нашем случае – четырехугольника).

Сначала сложим геометрически известные силы $\bar{Q}$ и $\bar{T}$, затем через начало первого вектора $\bar{Q}$ проведем прямую, параллельную линии действия одной из реакций, например $\bar{S}_B$, а через конец последнего вектора $\bar{T}$– прямую, параллельную линии действия второй неизвестной по модулю реакции $\bar{S}_C$ (рис. 2.9). Точка пересечения проведенных прямых дает графическое решение данной задачи. Для определения направления реакций обойдем периметр построенного силового многоугольника, причем направление этого обхода определяется направлением известных сил $\bar{Q}$и $\bar{T}$.

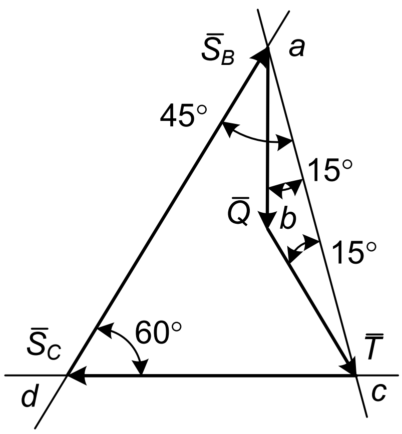


Рис. 2.9. Схема решения задачи 2.1 графическим способом

Значения реакций $\bar{S}_B$ и $\bar{S}_C$ определяются из решения соответствующего многоугольника, в нашем случае – четырехугольника *abcd*. Разобьем его на два треугольника *abc* и *acd*.

В равнобедренном треугольнике *abc*: $ac = 2ab \cdot \cos 15°$.

Применим к треугольнику *adc* теорему синусов:

$$\frac{ac}{\sin 60°} = \frac{S_B}{\sin 75°} = \frac{S_C}{\sin 45°},$$

откуда

$$S_C = \frac{2 \cdot Q \cdot \cos 15° \cdot \sin 45°}{\sin 60°} = 946 \text{ Н},$$

$$S_B = \frac{2 \cdot Q \cdot \cos 15° \cdot \sin 75°}{\sin 60°} = 1293 \text{ Н}.$$

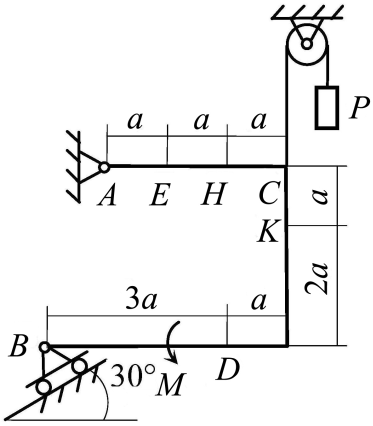
Для того чтобы определить сжаты или растянуты стержни *AB* и *AC*, перенесем с силового многоугольника найденные векторы $\bar{S}_B$ и $\bar{S}_C$ на соответствующие стержни (см. рис. 2.9), тогда реакция $\bar{S}_B$ будет направлена к узлу *A*, т. е. стержень *AB* сжат, а реакция $\bar{S}_C$ – от узла *A*, т. е. стержень *AC* растянут.

Контрольная задача 2.2

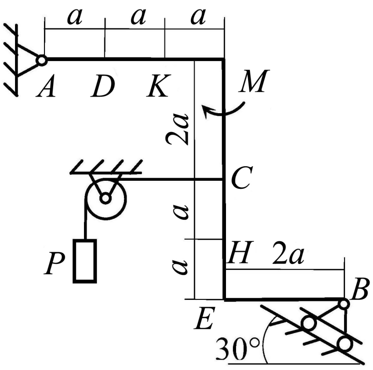
Задача на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении следует учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковы. Уравнение моментов будет более простым (будет содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\bar{F}$ зачастую удобнее разложить ее на две составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$ (указано в схеме решения задачи), для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона, тогда $m_0(\bar{F}) = m_0(\bar{F}') + m_0(\bar{F}'')$.

Условие

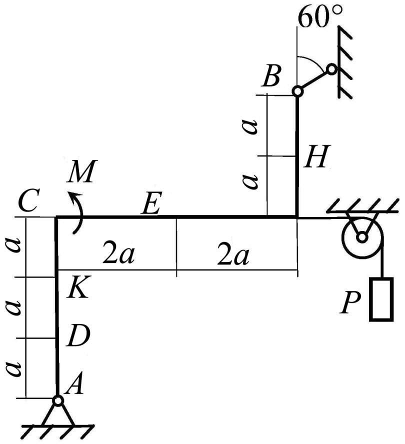
Жесткая рама (рис. 2.10, схемы 1–10, табл. 2.2) закреплена в точке *A* шарнирно, а в точке *B* прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.



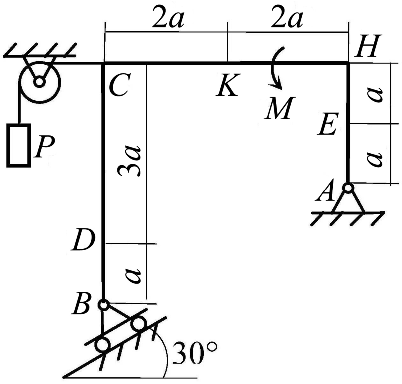
1



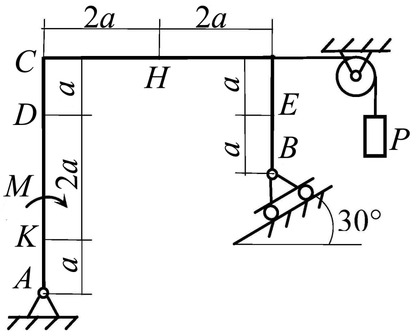
2



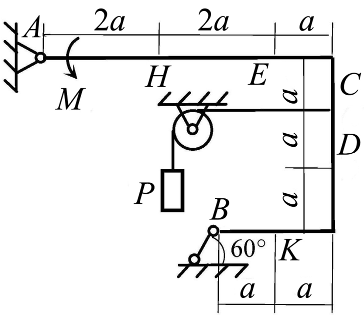
3



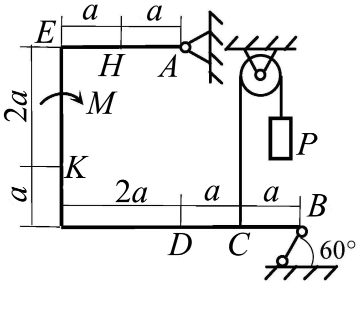
4



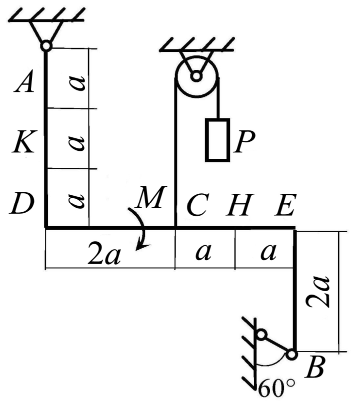
5



6



7



8

Рис. 2.10. Схемы к задаче 2.2

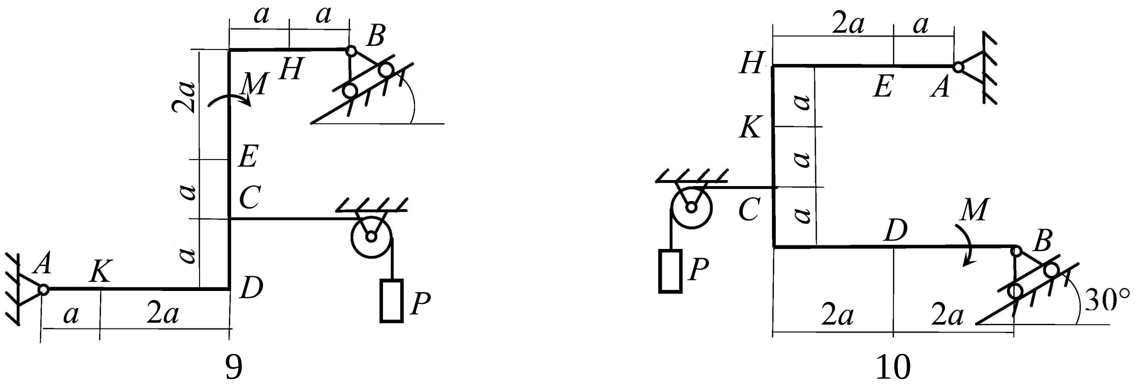
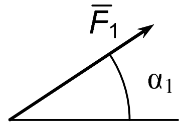
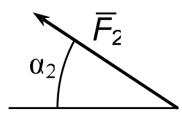
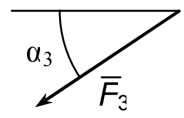
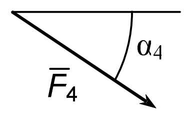


Рис. 2.10. Окончание

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P = 25 кН. На раму действует пара сил с моментом M = 25 кНм и две силы, величины которых, направления и точки приложения указаны в табл. 2.2.

Определить реакции связей в точках A, B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять a = 0,5 м.

Таблица 2.2

Цифры шифра	Значения 1-й цифры шифра			Значения 2-й цифры шифра		Значения 3-й цифры шифра			
	Номер схемы (рис. 2.10)								
		F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН	
		Точка приложения	α_1, град.	Точка приложения	α_2, град.	Точка приложения	α_3, град.	Точка приложения	α_4, град.
0	1	H	30	–	–	–	–	K	60
1	2	–	–	D	15	E	60	–	–
2	3	K	75	–	–	–	–	E	30
3	4	–	–	K	60	H	30	–	–
4	5	D	30	–	–	–	–	E	60
5	6	–	–	H	30	–	–	D	75
6	7	E	60	–	–	K	15	–	–
7	8	–	–	D	60	–	–	H	15
8	9	H	60	–	–	D	30	–	–
9	10	–	–	E	75	K	30	–	–

Пример решения

Условие. Жесткая пластина $ABCD$ (рис. 2.11) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке. Определить реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками, если $F = 25$ кН, $\alpha = 60°$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75°$, $M = 50$ кН · м, $\beta = 30°$, $a = 0{,}5$м.

Решение. Рассмотрим равновесие пластины (рис. 2.11). Проведем координатные оси x и y и изобразим действующие на пластину силы: силу $\bar{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\bar{T}$ (по модулю $\bar{T} = \bar{P}$) и реакции связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, при этом реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

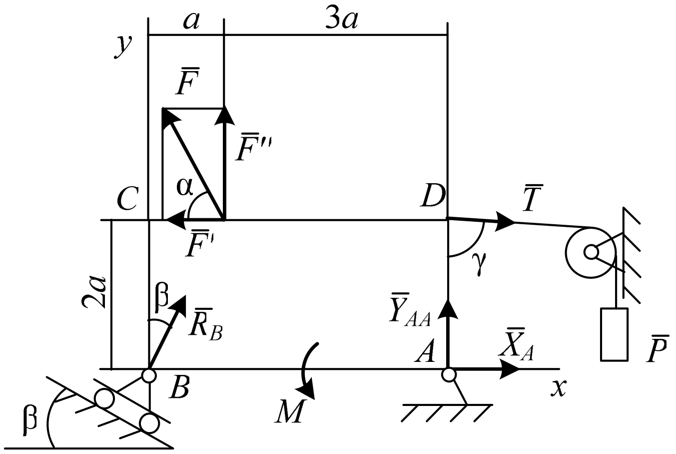


Рис. 2.11. Схема решения задачи 2.2

Для получения плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$ ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$.

Получим:

$$\Sigma F_{kx} = 0;\ X_A + R_B\sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0;$$

$$\Sigma F_{kx} = 0;\ Y_A + R_B\cos\beta - F\sin\alpha + T\cos\gamma = 0;$$

$$\Sigma m_A = (\bar{F}_k) = 0;\ M - R_B\cos\beta 4a + F\cos\alpha 2a - F\sin\alpha 3a - T\sin\gamma 2a = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

$$x_A = -8{,}5 \text{ кН},\ y_A = -23{,}3 \text{ кН},\ R_B = 7{,}3 \text{ кН}.$$

Знак «минус» указывает, что силы $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ имеют направления, противоположные показанным на рис. 2.11.

Контрольная задача 2.3

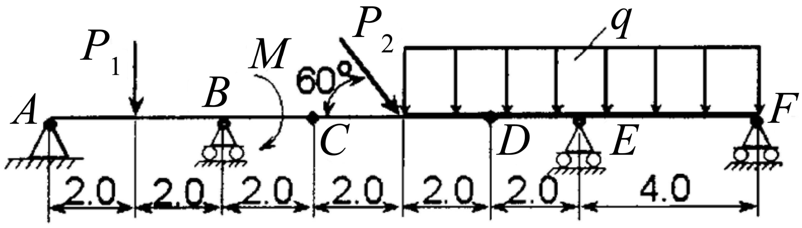
Условие

Задача на равновесие системы твердых тел (конструкции, представляющей составную балку с промежуточными шарнирами), находящихся под действием произвольной плоской системы сил. Для определения реакций связей в данном случае основным является способ расчленения, при котором наряду с равновесием всей системы тел рассматривается равновесие отдельных тел (или групп тел системы). При этом все остальные тела системы отбрасываются, а их действие на рассматриваемое тело заменяется соответствующими реакциями.

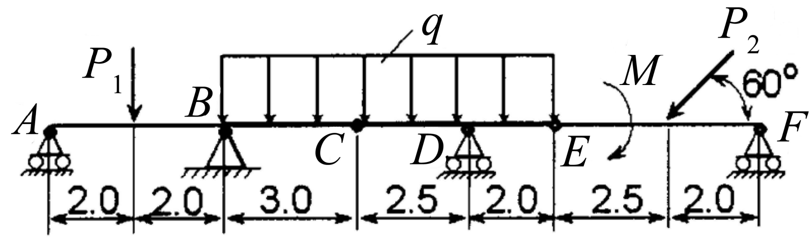
При рассмотрении равновесия всей системы тел силы взаимодействия между отдельными телами, входящими в систему, являются внутренними взаимно уравновешенными силами и в уравнения равновесия не входят. При этом при рассмотрении равновесия каждого тела в отдельности (или групп тел системы) силы взаимодействия между отдельными телами становятся реакциями связей, по которым произведено расчленение системы тел. В силу закона равенства действия противодействию реакции связей рассматриваемого тела равны по модулю и противоположны по направлению соответствующим реакциям, действующим на отброшенную часть системы. Исходные данные приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

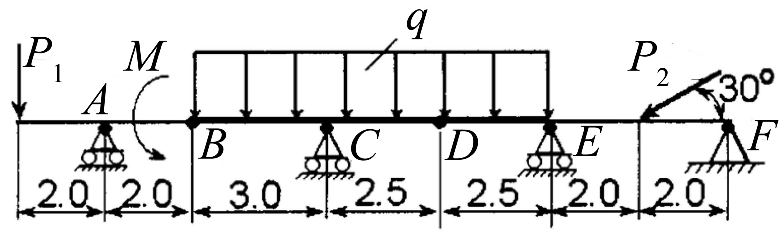
Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра		Значения 2-й цифры шифра	Значения 3-й цифры шифра	
	Сила, кН		M, Н · м	Номер схемы (рис. 2.12)	q, кН/м
	P_1	P_2			
1	6	10	250	1	0,8
2	12	18	360	2	1,4
3	10	7	240	3	1,2
4	8	14	300	4	1,0
5	14	9	260	5	0,9
6	9	12	550	6	2,0
7	7	13	460	7	1,5
8	15	7	680	8	1,8
9	5	15	600	9	1,6
0	11	20	580	10	0,7



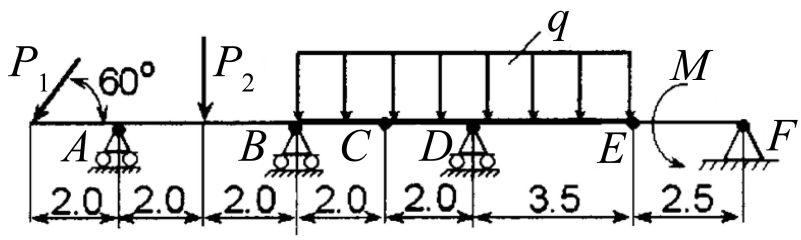
1



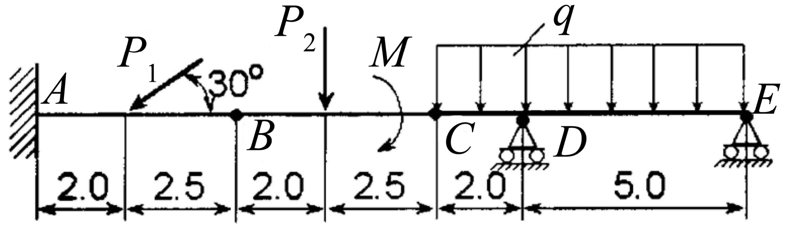
2



3

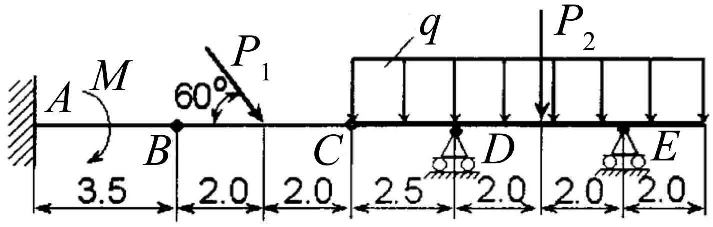


4

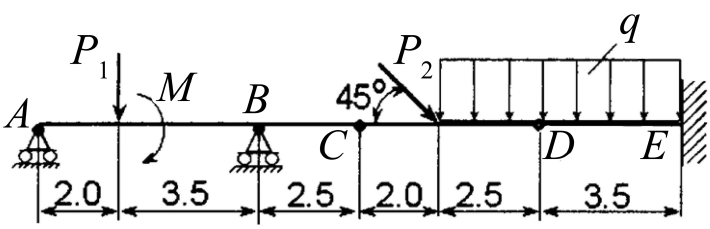


5

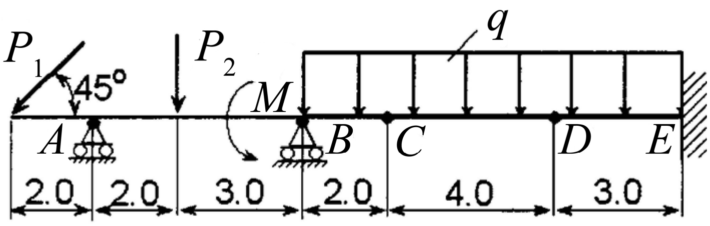
Рис. 2.12. Схемы к задаче 2.3



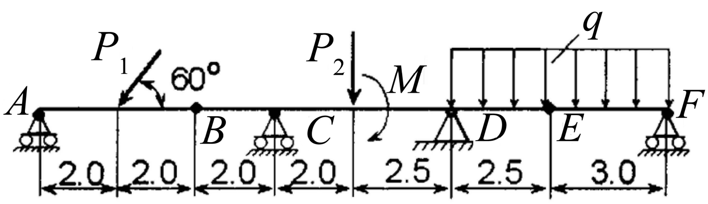
6



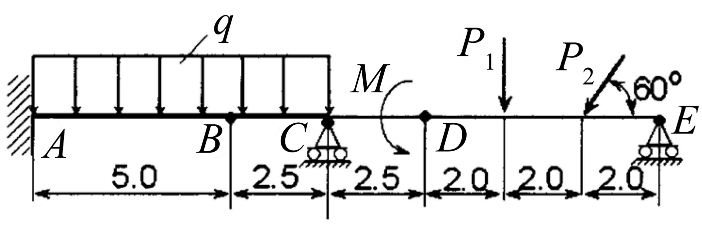
7



8



9



10

Рис. 2.12. Окончание

При решении задач данного типа удобно придерживаться следующего порядка.

1. К конструкции прикладывают все заданные силы.

2. Согласно принципу освобождаемости от связей отбрасывают внешние связи, заменяя их соответствующими реакциями.

3. Установив, что число неизвестных реакций превышает число уравнений равновесия, которые можно составить для системы тел, конструкцию расчленяют, заменяя внутренние силы соответствующими реакциями, с учетом закона равенства действия противодействию.

4. Каждое из тел, входящих в состав конструкции, рассматривают как свободное, находящееся под действием заданных сил и реакций связей (внешних и внутренних).

5. Сопоставляя число неизвестных величин и число всех уравнений равновесия, которые могут быть составлены после расчленения конструкции, устанавливают, что эти числа должны быть равны, если задача является статически определенной.

6. Выбирают наиболее удобные системы координат для каждого тела и составляют уравнения равновесия сил, приложенных к каждому телу.

7. Если задача статически определена, то полученную систему уравнений решают в наиболее удобной последовательности и находят все неизвестные величины.

Примечание. Некоторые задачи можно решить проще, если вместо уравнений равновесия сил, приложенных к одному из тел, использовать уравнения равновесия сил, приложенных ко всей конструкции.

Пример решения

Условие. На горизонтальную составную балку с двумя промежуточными шарнирами C и D (рис. 2.13, *а*) действуют силы P_1 = 6 кН, P_2 = 10 кН, пара сил с моментом M = 0,025 кНм и распределенная нагрузка интенсивностью q = 0,8 кН/м. Найти реакции опор и давления в промежуточных шарнирах балки.

Решение. Заменяя опоры A и B реакциями, направленными вертикально вверх, а жесткую заделку в точке E – двумя составляющими реакции и парой сил с моментом M_E, убеждаемся в том, что число неизвестных реакций равно пяти. Для конструкции, находящейся под действием плоской системы сил, можно составить три уравнения равновесия. Следовательно, для решения данной задачи нужно расчленить конструкцию на отдельные тела по промежуточным шарнирам *C* и *D* (рис. 2.13, *б*).

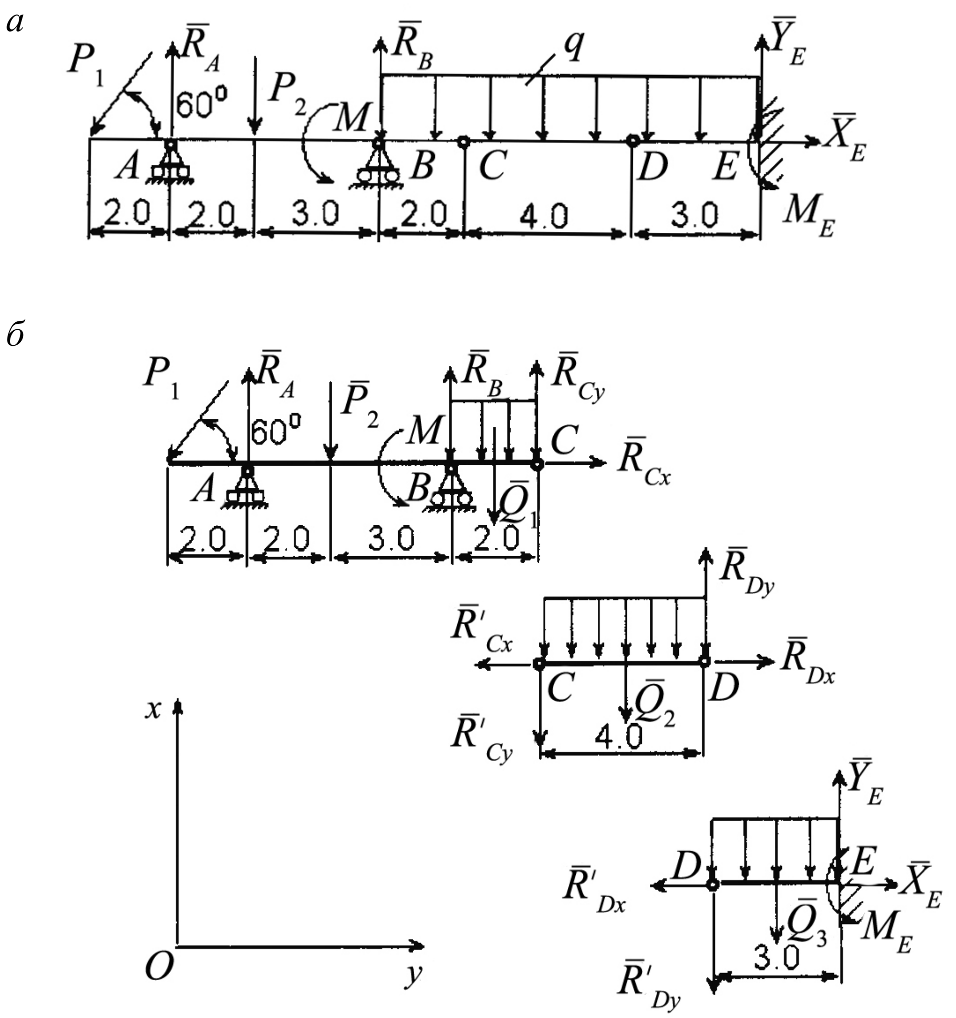


Рис. 2.13. Схема решения задачи 2.3

После замены внутренних сил, действующих в шарнирах, соответствующими реакциями, убеждаемся в том, что задача является статически определенной, так как для каждой части можно составить по три уравнения равновесия (всего – девять уравнений), из которых можно найти девять неизвестных.

Составим уравнения равновесия для первой части конструкции:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \ -P_1\cos 60° + R_{Cx} = 0;$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \ -P_1\sin 60° + R_A - P_2 + R_B - Q_1 + R_{Cy} = 0;$$

$$\Sigma M_A(\overline{F}_i) = 0; P_1\sin 60° \cdot 2 - P_2 \cdot 2 + M + R_B \cdot 5 - Q_1 \cdot 6 + R_{Cy} \cdot 7 = 0.$$

Здесь $Q_1 = q \cdot 2{,}0 = 0{,}8 \cdot 2{,}0 = 1{,}6$кН – равнодействующая распределенной нагрузки, действующей на участке *BC*. Точка приложения равнодействующей делит отрезок *BC* пополам.

Составим уравнения равновесия для второй части конструкции:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \ -R'_{Cx} + R_{Dx} = 0;$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \ -R'_{Cy} + Q_2 + R_{Dy} = 0;$$

$$\Sigma M_C(\bar{F}_i) = 0; \ -Q_2 \cdot 2{,}0 + R_{Dy} \cdot 4{,}0 = 0.$$

Здесь $Q_2 = q \cdot 4{,}0 = 0{,}8 \cdot 4{,}0 = 3{,}2$ кН – равнодействующая распределенной нагрузки, действующей на участке CD. Ее линия действия делит отрезок CD пополам.

Кроме того, $R_{Cx} = R'_{Cx}$; $R_{Cy} = R'_{Cy}$.

Составим уравнения равновесия для третьей части конструкции:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \ R'_{Dx} + X_E = 0;$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \ -R'_{Dy} - Q_3 + Y_E = 0;$$

$$\Sigma M_E(\bar{F}_i) = 0; \ -R'_{Dy}\, 3{,}0 - Q_3 \cdot 1{,}5 - M_E = 0.$$

Здесь $Q_3 = q \cdot 3{,}0 = 0{,}8 \cdot 3{,}0 = 2{,}4$ кН – равнодействующая распределенной нагрузки, действующей на участке DE. Ее линия действия делит отрезок DE пополам.

Кроме того, $R'_{Dx} = R_{Dx}$; $R'_{Dy} = R_{Cy}$.

В результате получим систему девяти уравнений с девятью неизвестными R_A, R_B, R_{Cx}, R_{Cy}, R_{Dx}, R_{Dy}, X_E, Y_E, и M_E. Решая эту систему, получим:

$$R_{Cx} = P_1 \cos 60° = 6 \cdot 0{,}5 = 3 \text{ кН};$$

$$R_{Dx} = R'_{Cx} = R_{Cx} = 3 \text{ кН};$$

$$X_E = R'_{Dx} = R_{Dx} = 3 \text{ кН};$$

$$R_{Dy} = \frac{2{,}0 \cdot Q_2}{4} = \frac{2{,}0 \cdot 3{,}2}{4} = 1{,}6 \text{ кН};$$

$$R_{Cy} = R'_{Cy} = R_{Dy} - Q_2 = 1{,}6 - 3{,}2 = -1{,}6 \text{ кН};$$

$$M_E = -Q_3 \cdot 1{,}5 - R_{Dy} \cdot 3{,}0 = -2{,}4 \cdot 1{,}5 - 1{,}6 \cdot 3{,}0 = -8{,}4 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$R_B = \frac{-P_1 \cdot \sin 60° \cdot 2{,}0 + P_2 \cdot 2{,}0 - M + Q_1 \cdot 6{,}0 - R_{Cy} \cdot 7{,}0}{5{,}0} =$$

$$= \frac{-6 \cdot 0{,}866 \cdot 2 + 10 \cdot 2{,}0 - 0{,}025 + 1{,}6 \cdot 6{,}0 - (-1{,}6) \cdot 7}{5{,}0} = \frac{30{,}383}{5{,}0} \cong 6{,}08 \text{ кН};$$

$$R_A = P_1 \cdot \sin 60° + P_2 - R_B - R_{Cy} + Q_1 = 6 \cdot 0{,}866 + 10 - 6{,}08 + 1{,}6 -$$

$$- (-1{,}6) = 12{,}32 \text{ кН};$$

$$Y_E = Q_3 + R_{Dy} = 2{,}4 + 1{,}6 = 4{,}0 \text{ кН}.$$

Знак «минус», полученный в результате расчетов некоторых из реакций, показывает, что действительное направление этих реакций (R_{Cy} и M_E) противоположно выбранному при решении задачи.

Для проверки результатов решения составим уравнения равновесия для всей конструкции и подставим в них найденные значения реакций связей:

$$\Sigma F_{ix} = 0;\ -P_1\cos 60° + X_E = 0;$$

$$\Sigma F_{iy} = 0;\ -P_1\sin 60° + R_A - P_2 + R_B - q(2{,}0 + 4{,}0 + 3{,}0) + Y_E = -6 \cdot 0{,}866 +$$
$$+ 12{,}32 - 10 + 6{,}08 - 0{,}8 \cdot 9{,}0 + 4{,}0 = 22{,}40 - 22{,}40 = 0;$$

$$\Sigma M_E(\bar{F}_i) = 0; P_1\sin 60° \cdot 16{,}0 - R_A \cdot 14{,}0 + P_2 \cdot 12{,}0 + M - R_B \cdot 9{,}0 +$$
$$+ q \cdot 9{,}0 \cdot 4{,}5 + M_E = 6 \cdot 16{,}0 - 12{,}32 \cdot 14{,}0 + 10 \cdot 12{,}0 + 0{,}025 - 6{,}08 \cdot 9{,}0 +$$
$$+ 0{,}8 \cdot 40{,}5 + (-8{,}4) = 235{,}56 - 235{,}60 \approx 0.$$

Вычисления показывают, что условия равновесия выполняются с достаточной точностью, следовательно, задача решена правильно.

Глава 3. Пространственная система сил

3.1. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно какой-либо оси называется величина, характеризующая вращательный эффект данной силы относительно этой оси. Например, вращение двери на петлях вокруг вертикальной оси z вызывается силой F', приложенной к ручке двери. Эта сила лежит в плоскости, перпендикулярной оси z, т. е. является проекцией силы F. Другая проекция силы F, параллельная вертикальной оси, стремится переместить тело вдоль оси z. Таким образом, *момент силы относительно оси равен моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью* [4]. Тогда согласно определению момента относительно оси

$$M_z(\bar{F}) = \pm F_n h,$$

где M_z – момент силы относительно оси z;

F_n – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси z;

h – плечо.

Знаки «плюс» или «минус» определяются следующим правилом: если смотреть на плоскость с положительного направления оси и при этом проекция силы на плоскость вращает тело против часовой стрелки, то момент считается положительным, если же по часовой – то отрицательным.

Свойства моментов силы относительно оси:

● момент не изменяется при переносе силы вдоль линии ее действия, так как при этом не меняется ни величина проекции силы, ни ее плечо;

● момент равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости (при этом равна нулю проекция силы на перпендикулярную плоскость (рис. 3.1), либо равно нулю плечо, если линия действия силы пересекает ось).

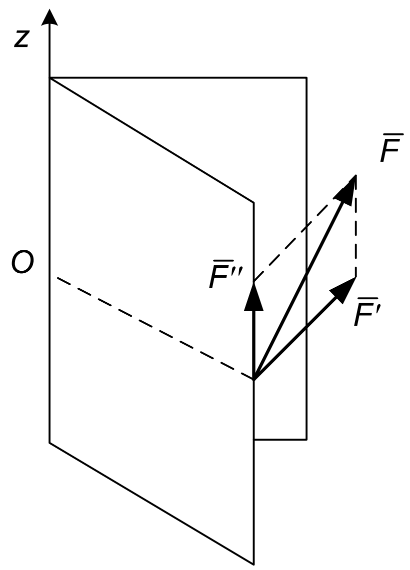


Рис. 3.1. Момент силы относительно оси

Чтобы найти момент некоторой силы относительно оси, нужно спроецировать эту силу на плоскость, перпендикулярную к данной оси, а затем вычислить момент этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 3.2).

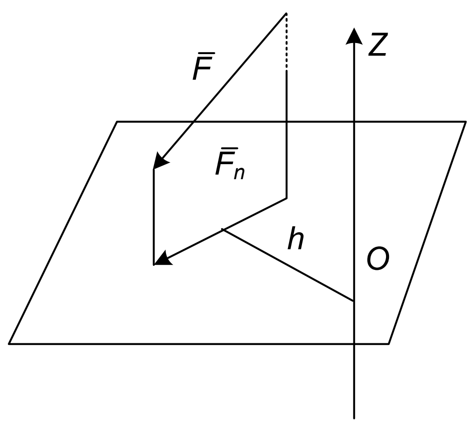


Рис. 3.2. Определение момента силы относительно оси

Момент силы $\bar{F}$ относительно оси z обозначим $M_z(\bar{F})$, проекцию силы – $\bar{F}$, а перпендикулярную к оси z плоскость – символом $\bar{F}_n$. Плечо силы $\bar{F}_n$ относительно точки O – это расстояние h.

3.2. Главный вектор и главный момент системы сил

Существуют определенные условия равновесия системы сил, как угодно расположенных в пространстве.

Если силы не образуют сходящуюся систему, а расположены как угодно в пространстве, то их можно привести к одному центру с добавлением главного момента (согласно теореме Пуансо). При этом получим пространственную систему сходящихся сил и систему пар, расположенных в разных плоскостях.

Условия равновесия заключаются в том, чтобы главный вектор и главный момент относительно центра приведения равнялись нулю.

Сходящиеся силы можно сложить по правилу силового многоугольника и получить *главный вектор*. Вектор равнодействующей (т. е. главный вектор) равен нулю только в том случае, если все его проекции на оси координат равны нулю. Таким образом, выражения для R_x, R_y, R_z примут следующий вид:

$$R_x = \Sigma X_i = 0;\ R_y = \Sigma Y_i = 0;\ R_z = \Sigma Z_i = 0.$$

Эти условия означают, что *данная система сил не может обеспечить свободному твердому телу движения по направлению любой из трех осей координат, т. е. никакого поступательного движения вообще.*

Систему пар можно также заменить одной результирующей парой, момент которой называется главным моментом пространственной системы сил относительно выбранного центра приведения.

Модуль главного момента пространственной системы $M_{\text{ГЛ}}$ будет равен

$$M_{\text{ГЛ}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

где M_x, M_y, M_z – алгебраические суммы моментов всех сил относительно трех координатных осей соответственно.

Главный момент равен нулю, если выполняются следующие условия:

$$M_x = \Sigma M_x(\bar{F}_i) = 0; M_y = \Sigma M_y(\bar{F}_i) = 0; M_z = \Sigma M_z(\bar{F}_i) = 0.$$

Эти три условия означают, что *данная система сил не может сообщить телу вращения вокруг любой из трех не лежащих в одной плоскости осей координат, т. е. никакое вращательное движение невозможно.*

Таким образом, при соблюдении установленных шести уравнений равновесия системы сил, расположенных как угодно в пространстве, невозможно сообщить телу ни поступательного, ни вращательного движения, а потому и нельзя изменить его состояние покоя.

Вывод: для равновесия системы сил, как угодно расположенных в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы моментов всех сил относительно каждой из этих трех осей [1, 4].

3.3. Равновесие произвольной пространственной системы сил

Свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы, для его равновесия и покоя необходимо шесть уравнений равновесия: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$. Решение этих уравнений дает ответ на основную задачу статики – нахождение реакций в местах закрепления свободного тела.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение момента силы относительно оси.
2. Раскройте понятия главного вектора и главного момента системы сил.
3. Каковы условия и уравнения равновесия пространственной системы сил?

Контрольная задача

Задача на равновесие твердого тела (вала), находящегося под действием системы сил, произвольно расположенных в пространстве. Порядок решения этой задачи такой же, как и в предыдущих примерах, за исключением того, что для определения искомых величин надо составить шесть уравнений равновесия [2].

Следует иметь в виду, что при нахождении проекции силы на ось часто бывает проще сначала найти ее проекцию на координатную плоскость, в которой расположена эта ось, а затем найденную проекцию спроецировать на данную ось. Точно так же при определении момента силы относительно оси нередко бывает удобно разложить эту силу на взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых параллельна какой-нибудь координатной оси, затем применить теорему Вариньона. Исходные данные для различных вариантов даны в таблице и рис. 3.3.

Таблица

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра		Значения 2-й цифры шифра					Значения 3-й цифры шифра	
	Углы, град		Расстояния, м			Силы, Н		Номер условия	Номер схемы (рис. 3.3)
	α_1	α_2	a	b	c	F	T_2		
1	0	60	1,0	1,1	1,0	800	100	1	1
2	30	45	1,2	1,3	1,2	900	200	1	2
3	45	30	1,4	1,5	1,4	1000	300	1	3
4	60	0	1,6	1,7	1,6	1100	400	2	4
5	30	60	1,8	1,9	1,8	1200	500	2	5
6	45	30	1,0	1,1	1,0	800	100	2	6
7	60	45	1,2	1,3	1,2	900	200	2	7
8	30	0	1,4	1,5	1,4	1000	300	3	8
9	45	60	1,6	1,7	1,6	1100	400	3	9
0	60	30	1,8	1,9	1,8	1200	500	3	10

Условия

1. На горизонтальный вал, который может вращаться в подшипниках A и B, насажены шкив 1 радиусом r_1 = 12 см и шкив 2 радиусом r_2 = 16 см. Ветви ремней каждого шкива параллельны между собой и образуют соответственно углы α_1 с горизонталью и α_2 с вертикалью. Пренебрегая весом шкива и вала, найти натяжение ведущей и ведомой ветви ремня, а также реакции подшипников при равновесии вала.

Примечание. Натяжение ведущей ветви ремня принять вдвое больше натяжения ведомой ($T_1 = 2t_1$; $T_2 = 2t_2$).

2. На горизонтальный вал насажены колесо 1 радиусом r_1 = 20 см, колесо 2 радиусом r_2 = 30 см и прикреплен перпендикулярно оси вала и горизонтально рычаг CD длиной l = 20 см. К одному колесу приложена сила $\overline{F}$, образующая с горизонталью угол α_1, а к другому – сила $\overline{T}_2$, образующая с вертикалью угол α_2; к рычагу приложена вертикальная сила $\overline{P}$. Пренебрегая весом вала, колес и рычага, определить силу $\overline{P}$, при которой вал находится в равновесии, а также реакции подшипников A и B.

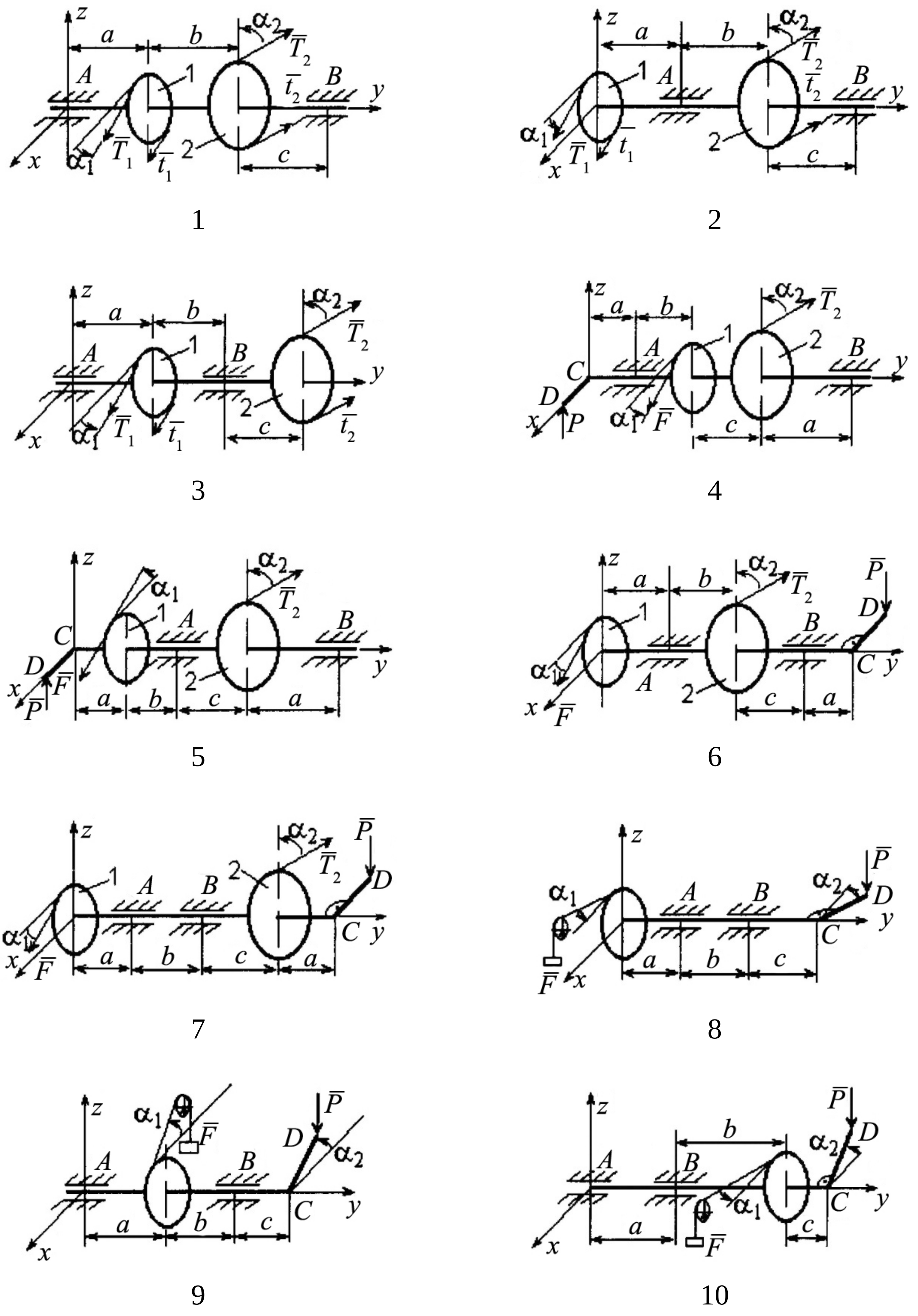


Рис. 3.3. Схемы к задаче

3. На горизонтальный вал насажено колесо радиусом r_1 = 15 см и прикреплен перпендикулярно оси вала рычаг *CD* длиной l = 20 см, образующий с горизонтальной плоскостью угол α_2. Веревка, намотанная на колесо и натягиваемая грузом *F*, сходит с колеса по касательной, наклоненной под углом α_1 к оси *Ax*. Пренебрегая весом вала, колеса и рычага и трением в блоке, определить вертикальную силу $\overline{P}$, при которой вал находится в равновесии, а также реакции подшипников *A* и *B*.

Пример решения

Условие. На горизонтальный вал насажено колесо радиусом r_1 = 12 см и прикреплен перпендикулярно оси вала рычаг *CD* длиной l = 20 см, образующий с горизонтальной плоскостью угол α_2 = 30°. Веревка, намотанная на колесо и натягиваемая грузом *F* = 1,2 кН, сходит с колеса по касательной, наклоненной под углом α_1 = 60° к оси *Ax*. Пренебрегая весом вала, колеса, рычага и трением в блоке, определить вертикальную силу $\overline{P}$, при которой вал находится в равновесии, а также реакции подшипников *A* и *B*, если $a = b = c$ = 1,8 м (рис. 3.4).

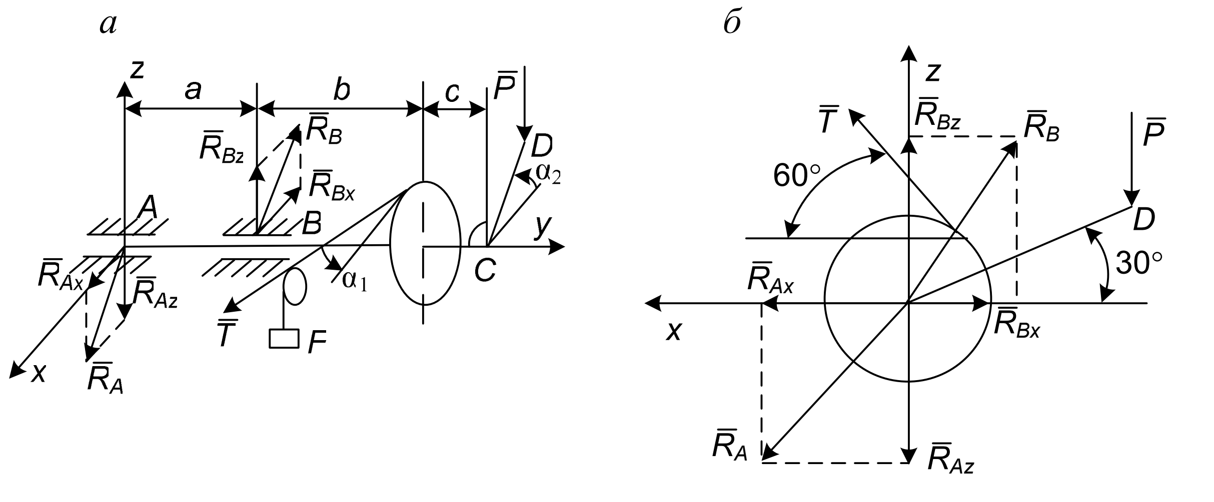


Рис. 3.4. Схема решения задачи

Решение. К валу кроме силы $\overline{P}$, действующей на рычаг *CD*, приложена реакция веревки (сила натяжения) $\overline{T}$, численно равная силе тяжести груза *F*, так как по условию задачи трения в блоке нет (см. рис. 3.4, *а*). Направлена эта реакция вдоль веревки в ту сторону, куда веревка тянет блок. Реакции подшипников $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$, расположенных в плоскостях, перпендикулярных оси Ay, разложим на взаимно перпендикулярные составляющие $\bar{R}_{Ax}$, $\bar{R}_{Az}$, $\bar{R}_{Bx}$ и $\bar{R}_{Bz}$. Направление составляющих выбирается произвольно.

Составим уравнения равновесия для вала, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил (см. рис. 3.4, *б*).

$$1)\ \Sigma F_{ix} = 0;\ R_{Ax} - R_{Bx} + T\cos 60° = 0;$$

$$2)\ \Sigma F_{iy} = 0;\ 0 = 0;$$

$$3)\ \Sigma F_{iz} = 0;\ -R_{Az} + R_{Bz} + T\sin 60° = 0;$$

$$4)\ \Sigma M_x(\bar{F}_i) = 0; R_{Bz} \cdot a + T\sin 60° \cdot (a + b) - P(a + b + c) = 0;$$

$$5)\ \Sigma M_y(\bar{F}_i) = 0; T \cdot r_1 - Pl\cos 30° = 0;$$

$$6)\ \Sigma M_z(\bar{F}_i) = 0; R_{Bx} \cdot a - T\cos 60° \cdot (a + b) = 0.$$

Из последнего соотношения найдем

$$R_{Bx} = T\cos 60° \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) = 1{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot (1+1) = 1{,}2 \text{ кН}.$$

Из пятого соотношения определим

$$P = T \cdot \frac{r_1}{l \cdot \cos 30°} = 1{,}2 \cdot \frac{0{,}12}{0{,}2 \cdot 0{,}866} = 0{,}83 \text{ кН}.$$

Из четвертого соотношения вычислим

$$R_{Bz} = P\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) - T\cos 30°\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 0{,}83 \cdot 3 - 1{,}2 \cdot 0{,}866 \cdot 2 = 0{,}42 \text{ кН}.$$

Из третьего соотношения найдем

$$R_{Az} = R_{Bz} + T\cos 30° - P = 0{,}42 + 1{,}2 \cdot 0{,}866 - 0{,}83 = 0{,}63 \text{ кН}.$$

Из первого соотношения найдем

$$R_{Ax} = R_{Bx} + T\cos 60° = 1{,}2 - 1{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}60 \text{ кН}.$$

Модули реакций подшипников:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{0{,}60^2 + 0{,}63^2} = 0{,}87 \text{ кН};$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{Bz}^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}42^2} = 1{,}27 \text{ кН}.$$

Для определения направления реакции найдем угол между соответствующей реакцией и осью x

$$\cos\left(\bar{R}_A, \hat{\ } \bar{i}\right) = \frac{R_{Ax}}{R_A} = \frac{0{,}60}{0{,}87} = 0{,}690, \quad \left(\bar{R}_A, \hat{\ } \bar{i}\right) = 46{,}4°;$$

$$\cos\left(\bar{R}_B, \hat{\ } \bar{i}\right)(\wedge \bar{i}) = \frac{R_{Bx}}{R_A} = \frac{1{,}20}{1{,}27} = 0{,}945, \quad \left(\bar{R}_B, \hat{\ } \bar{i}\right) = 19{,}1°.$$

Глава 4. Трение

4.1. Трение покоя

Существует сила трения скольжения и сила трения покоя.

Опыт показывает, что при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая *силой трения скольжения* [4].

Возникновение трения обусловлено, прежде всего, шероховатостью поверхностей, создающей сопротивление перемещению, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. Изучение всех особенностей явления трения представляет собой довольно сложную физико-механическую проблему, рассмотрение которой выходит за рамки курса теоретической механики.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем закономерностей, которые с достаточной точностью отражают основные особенности явления трения. Эти закономерности, называемые законами трения скольжения при покое, можно сформулировать следующим образом.

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), которая может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого *предельной силой трения*.

Приложенная к телу сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

2. Предельная сила трения $F_{пр}$ численно равна произведению статического коэффициента трения f_0 на нормальное давление или нормальную реакцию N:

$$F_{пр} = f_0 \cdot N.$$

Величина $F_{пр}$ в широких пределах зависит от соприкасающихся при трении поверхностей.

Статический коэффициент трения f_0 – величина безразмерная; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность и т. п.).

3. Значение предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров, соприкасающихся при трении поверхностей.

Из первых двух законов следует, что при равновесии $F \leqslant F_{пр}$ или

$$F_{пр} \leqslant f_0 \cdot N.$$

Следует подчеркнуть, что значение силы трения при покое определяется неравенством и, следовательно, это значение может быть любым, но не большим, чем $F_{пр}$. Только при решении соответствующей задачи можно установить, чему конкретно равна сила трения. Величине $F_{пр}$ сила трения будет равна тогда, когда действующая на тело сдвигающаяся сила достигнет такого значения, что при малейшем ее дальнейшем увеличении тело будет двигаться (скользить). Равновесие, имеющее место, когда сила трения равна $\bar{F}_{пр}$, принято называть *предельным равновесием*.

Значения коэффициента трения f_0 для некоторых материалов: металл по металлу – 0,15 ÷ 0,25; сталь по льду – 0,027.

Более подробные сведения даются в соответствующих справочниках.

4.2. Трение скольжения

При рассмотрении равновесия твердых тел, в виду пренебрежения трением, все связи были приняты за абсолютно гладкие. Если связью является поверхность, то реакция ее направляется перпендикулярно опорной поверхности. Это соответствует предположению, что гладкая поверхность препятствует перемещению твердого тела только в направлении, перпендикулярном к ней, и не мешает ему перемещаться по самой поверхности.

В действительности же, когда два реальных твердых тела находятся в соприкосновении, взаимное касание их происходит не в одной точке, а по некоторой поверхности (рис. 4.1). Какой бы гладкой не казалось поверхность, она содержит большое количество микронеровностей, которые видны под большим увеличением.

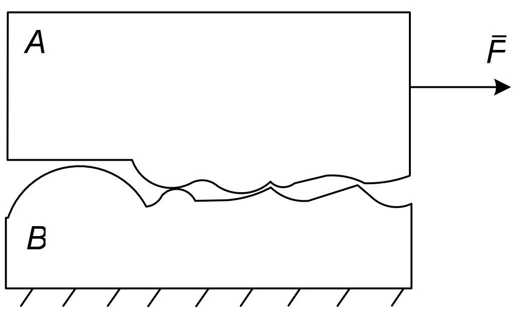


Рис. 4.1. Поверхности соприкосновения двух твердых тел

Если тело A двигать так, чтобы одни и те же площадки его поверхности соприкасались с различными площадками другого тела B, то появится сопротивление движению. Это сопротивление называется *трением скольжения*.

Шероховатость трущихся тел не единственная причина трения скольжения. Если наложить одну на другую две хорошо отшлифованные пластинки из металла или стекла, то придется приложить большое усилие, чтобы сдвинуть одну относительно другой. Здесь причиной трения скольжения являются силы межмолекулярного сцепления, достигающие иногда очень больших величин. Поэтому трение скольжения можно объяснить двумя основными причинами: шероховатость поверхностей трущихся тел и молекулярным взаимодействием частиц трущихся тел. Вообще же трение скольжения является сложным физико-химическим явлением.

Трение скольжения играет в природе и технике огромную роль, в одних случаях полезную, а в других – вредную. Вызывая износ трущихся поверхностей, различных деталей машин, трение уменьшает их долговечность, сокращает срок службы машин. С другой стороны, без трения невозможна работа, например, винтовых соединений, различных зажимов, невозможно движение автомобилей, поездов и самих людей. Для уменьшения трения применяют смазку трущихся поверхностей.

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению коэффициента трения f на нормальное давление N [4]:

$$F = f \cdot N.$$

Коэффициент трения скольжения f также является величиной безразмерной и определяется опытным путем. Значение данного коэффициента зависит не только от материала и состояния поверхностей, но и, в некоторой степени, от скорости движущихся тел. В большинстве случаев с увеличением скорости коэффициент f сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

Если к твердому телу, покоящемуся на шероховатой горизонтальной поверхности приложить горизонтальную силу $\bar{F}$, то действие этой силы вызовет появление силы сцепления $\bar{F}_{сц} = -\bar{F}$, представляющей силу противодействия в плоскости смещению тела (рис. 4.2).

Благодаря сцеплению тело останется в покое при изменении модуля силы $\bar{F}$ от 0 до значения $\bar{F}_{\max}$. Это значит, что модуль силы сцепления тоже должен измениться от 0 до $\bar{F}_{сц}$. Модуль $\bar{F}_{сц}$, как показывает опыт, пропорционален нормальному давлению N тела на плоскость

$$F_{сц}^{\max} = f_{сц} \cdot N.$$

Коэффициент пропорциональности $f_{сц} = F_{сц}^{\max} / N$ является отвлеченным числом и называется коэффициентом сцепления [4]. Он $f_{сц}$ зависит от материала и физического состояния соприкосновения тел и определяется экспериментально. Его величина обычно не превышает 1,0.

$$F_{сц} \leqslant f_{сц} \cdot N.$$

Направление $\bar{F}_{сц}$ противоположно направлению того движения, которое возникло бы под действием приложенных к телу сил при отсутствии сцепления.

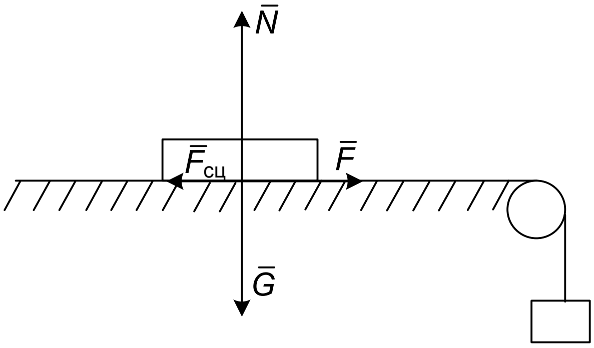


Рис. 4.2. Определение силы трения

При скольжении тела по шероховатой поверхности к нему приложена сила трения $F_{тр}$ скольжения, направленная в сторону, противоположную направлению скорости тела. Модуль силы трения пропорционален нормальному давлению N:

$$F_{тр} = f \cdot N,$$

где f – коэффициент трения скольжения, который определяется опытным путем.

Коэффициент трения – отвлеченная величина, зависящая от материала и физического состояния трущихся поверхностей, а также от скорости движения тела и удельного давления. В элементарных расчетах зависимость f от V и удельного давления часто не учитывается.

Экспериментально установлено, что $f < f_{сц}$.

Реакция $\bar{R}$ реальной (шероховатой) поверхности, в отличие от идеальной (гладкой) поверхности, имеет две составляющие: нормальную реакцию $\bar{N}$ и силу сцепления $\bar{F}_{сц}$ (или силу трения $\bar{F}_{тр}$ при движении). Угол $\varphi_{сц}$ в предельном состоянии называется *углом сцепления* (рис. 4.3) [4].

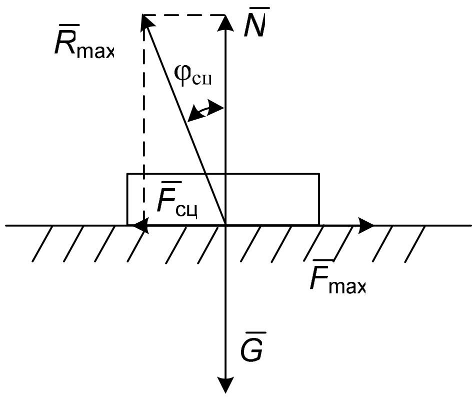


Рис. 4.3. Определение угла сцепления

Угол, тангенс которого равен коэффициенту трения, именуется *углом трения*.

$$\mathrm{tg}\varphi_{сц} = \frac{F_{сц}^{\max}}{N} = f_{сц} \text{ или } \varphi_{тр} = \mathrm{arctg} f_{сц}.$$

Конус с вершиной в точке касания тел, определяющая которого составляет угол сцепления с нормальной поверхностью тел, называется к*онусом сцепления*. Поверхность конуса сцепления представляет собой место максимальных реакций опорной поверхности.

Пространство внутри конуса – это совокупность возможных положений реакций опорной поверхности в состоянии покоя.

Пусть к покоящемуся телу приложена система сил (в том числе вес тела), линия действия равнодействующей $\bar{R}$, которая лежит внутри конуса (см. рис. 4.3). Эти силы не приведут тело в движение, так как сила $\bar{R}$ будет уравновешена реакцией поверхности (составляющая сил вдоль поверхности будет меньше $F_{сц}^{\max}$).

4.3. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого [4]. Вследствие деформации тел касание происходит по некоторой площадке AH, а нормальная реакция N оказывается смещенной в сторону на величину k, называемую *коэффициент трения качения* (рис. 4.4).

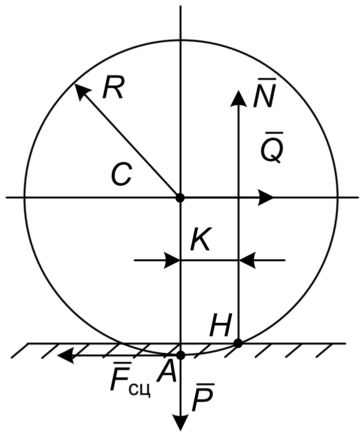


Рис. 4.4. Трение качения

Качение начинается тогда, когда движущая сила, приложенная к оси катка Q становится больше силы сопротивления качению $Q_{пр}$. Сила сопротивления качению определяется по следующей формуле:

$$Q_{пр} = \frac{k}{R} N,$$

где k – коэффициент трения качения;

R – радиус катка;

N – нормальная реакция.

Отношение k / R для большинства материалов значительно меньше коэффициента трения скольжения f_0. Поэтому каток будет катиться по опорной поверхности без проскальзывания. Этим объясняется то, что в технике всегда предпочтительна замена скольжения качением.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое сила трения скольжения?
2. Дайте определение предельной силы трения.
3. Что такое угол и конус сцепления?
4. Раскройте понятие трения качения.

Глава 5. Центр тяжести

5.1. Центр параллельных сил

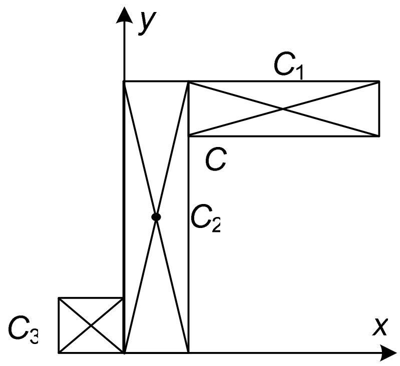
Точка, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется *центром параллельных сил* [1, 4].

5.2. Центр тяжести твердого тела

Центром тяжести твердого тела С называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела в пространстве.

Центр тяжести однородного тела определяется как центр тяжести соответствующего объема и площади.

Центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы C_1, C_2, C_3 (рисунок).



Определение центра тяжести плоской фигуры

Точку C называют центром тяжести всего объема V (v_k – часть объема тела), координаты его определяются следующими формулами:

$$x_c = \frac{\sum v_k \cdot x_k}{V};$$

$$y_c = \frac{\sum v_k \cdot y_k}{V};$$

$$z_c = \frac{\sum v_k \cdot z_k}{V}.$$

Точку C называют центром тяжести всей площади S (s_k – часть площади) [4]. Ее координаты определяются следующими формулами:

$$x_C = \frac{\sum s_k \cdot x_k}{S};$$

$$y_C = \frac{\sum s_k \cdot y_k}{S}.$$

5.3. Способы определения координат центра тяжести тел

Существует несколько способов определения координат центра тяжести тел: симметрия, разбиение, дополнение и экспериментальный способ.

Симметрия. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или в центре симметрии.

Разбиение. Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам, указанным в гл. 5.2. При этом число слагаемых в каждом из числителей будет равно числу частей, на которые разбито тело.

Дополнение. Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

Экспериментальный способ. Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации (самолет, паровоз) можно определять экспериментально. Один из возможных экспериментальных методов (метод подвешивания) состоит в том, что тело подвешивают на нити или на тросе за различные его точки. Направление нити, к которой подвешено тело, будет каждый раз давать направление силы тяжести. Точка пересечения этих направлений определяет центр тяжести тела.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Опишите центр тяжести плоской фигуры.
2. Каковы способы определения центра тяжести плоской фигуры?
3. Дайте определения центра тяжести твердого тела.

Часть II. КИНЕМАТИКА

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором движение изучается с геометрической стороны, без учета сил, определяющих его [1, 4].

В кинематике существует ряд ключевых понятий: механическое движение, траектория, перемещение, материальная точка, тело. Без знания этих понятий изучение данного раздела теоретической механики представляется крайне затруднительным.

Механическим движением называют изменение положения тела в пространстве с течением времени относительно других тел.

Траекторией называют линию в пространстве, описываемую точкой при своем движении. Расстояние, пройденное телом вдоль траектории движения, – это путь.

Перемещение – направленный отрезок, соединяющий начальное и конечное положение тела.

Материальная точка – частица тела, имеющая массу, размерами которой можно пренебречь по сравнению с размерами тела.

Тело – совокупность материальных точек, которая обладает массой всех материальных точек и моментами инерции всех материальных точек.

Глава 6. Кинематика точки

6.1. Способы задания движения точки

Существует три способа задания движения точки: 1 – координатный; 2 – естественный; 3 – векторный [4].

Координатный способ. В данной системе отсчета $Oxyz$ заданы координаты движущейся точки как функции времени: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$. Это называется уравнением движения точки заданным координатным способом (рис. 6.1)

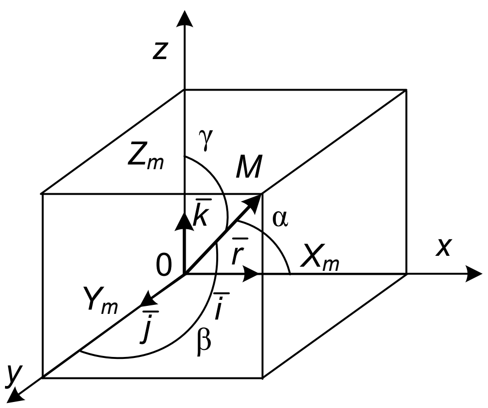


Рис. 6.1. Способы задания движения точки

Естественный способ задания движения точки (рис. 6.2). При этом способе заданы: а) траектория движения точки; б) начало отсчета и направление положительного отсчета дуговой координаты *S*, т. е. длины дуги; в) закон движения по траектории $S = f(t)$.

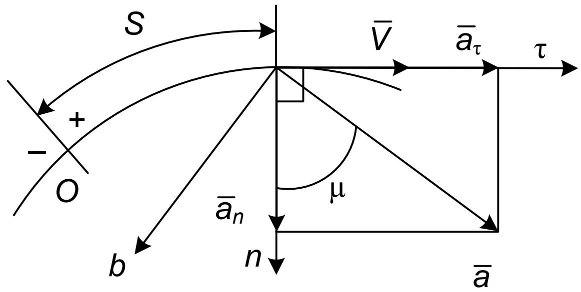


Рис. 6.2. Естественный способ задания движения точки

На рис. 6.2 $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ – соответственно касательная, нормаль и бинормаль; $\bar{a}_\tau, \bar{a}_n$ –соответственно касательное и нормальное ускорение точки.

Скорость определяется следующим образом:

$$\bar{v}_\tau = \dot{S} \cdot \bar{\tau},$$

где $\bar{\tau}$ –единичный вектор (орт), направленный по касательной к траектории движения.

Если $\dot{S} > 0$, то вектор скорости направлен в сторону увеличения *S*, если $\dot{S} < 0$, то – в сторону уменьшения дуговой координаты.

Векторный способ. В заданной системе отсчета известен закон изменения радиус-вектора точки *r* (см. рис. 6.1), т. е.

$$\bar{r} = f(t).$$

Поскольку $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{i} + z\bar{k}$, то *x*, *y*, *z* – функции времени.

6.2. Определение скорости и ускорения точки

Вектор скорости точки. Пусть в момент времени *t* положение точки *M* определяется радиус-вектором $\bar{r}$ (рис. 6.3), а в момент времени t_1 точка займет положение M_1, определяемое радиус-вектором $\bar{r}_1$. За промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ перемещение точки определяется вектором $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$. Этот вектор направлен по хорде при криволинейном движении и вдоль самой траектории, если движение прямолинейное. Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени называется *средней скоростью* точки $\overline{V}_{\text{ср}}$ за данный промежуток времени, т. е.

$$\overline{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}.$$

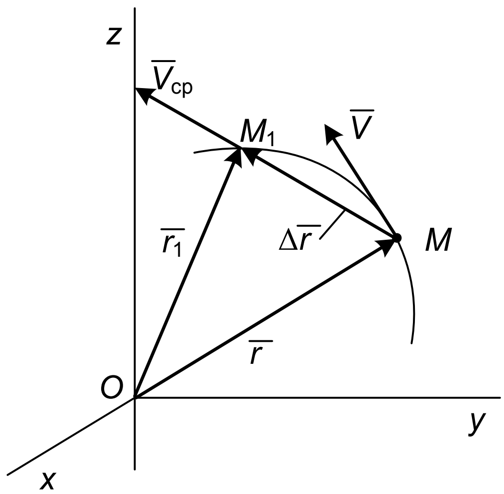


Рис. 6.3. Определение скорости точки

Чем меньше промежуток времени, тем точнее значение средней скорости, поэтому *скоростью точки в данный момент времени* можно считать предел отношения $\Delta\overline{r}\ /\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т. е. первую производную от радиус-вектора по времени:

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0}(\overline{V}_{\text{ср}}) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t};\ \ \overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}.$$

Вывод: вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиус-вектора точки по времени [4]. Единица измерения скорости – м/с.

Предельным направлением секущей (хорды) является касательная, поэтому вектор скорости при $\Delta t \to 0$ направлен по касательной к траектории точки в сторону движения. При прямолинейном движении вектор скорости направлен вдоль прямой, по которой движется точка.

При естественном способе задания движения $s = f(t)$ скорость определится как первая производная от расстояния по времени:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0}(V_{\text{ср}}) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t};\ V = \frac{ds}{dt}.$$

Вектор ускорения точки. Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение скорости с течением времени. Пусть в момент времени t движущаяся точка находится в положении M и имеет скорость $\bar{V}$, а в момент t_1 приходит в положение M_1 и имеет скорость $\bar{V}_1$. Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки получает приращение $\Delta\bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}$.

Величину вектора $\Delta\bar{V}$ определяют из параллелограмма (рис. 6.4), как разность диагонали и одной из сторон. Приращение скорости $\Delta\bar{V}$ за соответствующий промежуток времени Δt – это среднее ускорение точки M. Если $\Delta t \to 0$, то ускорение точки в данный момент времени – это первая производная от скорости точки по времени:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0}(\bar{a}_{\text{ср}}) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}; \;\text{ или }\; \bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt}.$$

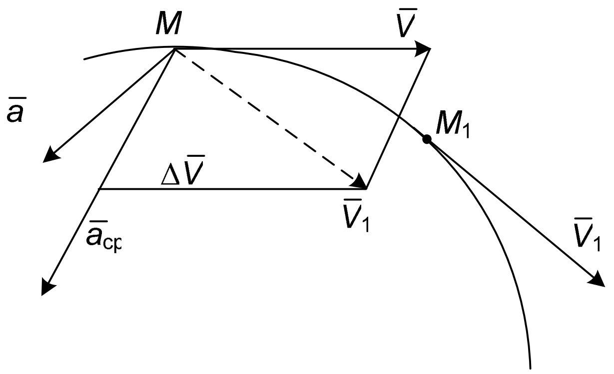


Рис. 6.4. Определение ускорения точки

Вывод: вектор ускорения данной точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени [4]. Единица измерения ускорения – м/с^2.

Если точка движется по плоской кривой линии, то вектор ускорения лежит в этой же плоскости и направлен в сторону вогнутости этой кривой. При прямолинейном движении вектор ускорения направлен вдоль прямой, по которой движется точка.

Рассмотрим более подробно скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения. Известно, что проекция производной от вектора на ось равна производной от проекции вектора на ту же ось. Скорость точки – это первая производная от вектора $\bar{r}$ по времени. Если вместо вектора $\bar{r}$ движение задать его проекциями на оси, т. е. координатами точек x, y, z, то проекции вектора скорости – это первые производные от координат точки по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt},\ V_y = \frac{dy}{dt},\ V_z = \frac{dz}{dt} \text{ или } V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z}.$$

Зная проекции скорости, можно найти ее модуль и направление, т. е. углы между вектором скорости и координатными осями:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$\cos\alpha = V_x / V;\ \cos\beta = V_y / V;\ \cos\gamma = V_z / V.$$

Вывод: проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Аналогичным образом можно определить ускорение точки по заданным координатам. Ускорение точки – это первая производная от скорости $\bar{V}$ или вторая производная от радиус-вектора $\bar{r}$ точки. Если векторы заменить проекциями на оси, то можно записать

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt}$$

или

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}.$$

Зная проекции ускорения, можно найти его модуль и направление, т. е. углы между вектором скорости и координатными осями:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos\alpha_1 = a_x / a;\ \cos\beta_1 = a_y / a;\ \cos\gamma_1 = a_z / a.$$

Вывод: проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени.

6.3. Касательное и нормальное ускорение точки

Введем понятие о кривизне кривых линий. Для точки, движущейся по криволинейной траектории, обозначены два соседних положения M и M_1

и проведены касательные в этих положениях. Угол между этими касательными называется *углом смежности* $\Delta\varphi$ (рис. 6.5) [1, 4].

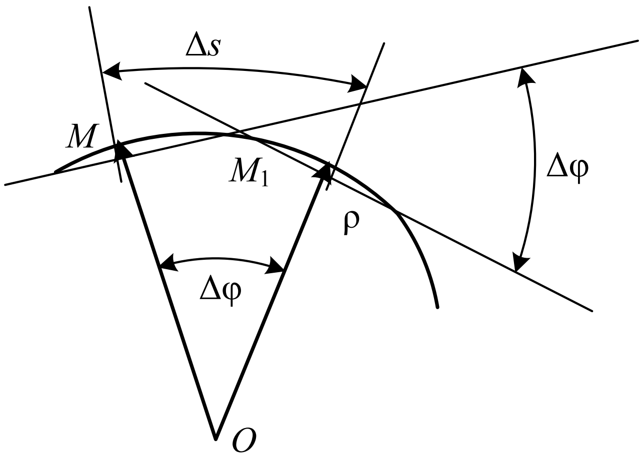


Рис. 6.5. Определение кривизны кривых линий

При бесконечно малых значениях длины дуги Δs радиус кривизны ρ в точках M и M_1 можно считать одинаковым. Таким образом, кривизна k кривой линии в данной точке – это предел отношения угла смежности к соответствующей длине дуги при $\Delta s \to 0$.

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}; \ \Delta s = R\Delta\varphi.$$

Для окружности радиуса R длина дуги определяется по формуле

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R}.$$

Следовательно, кривизна окружности во всех точках одинакова и равна

$$k = \frac{1}{R}.$$

Для каждой точки данной кривой можно подобрать такую окружность, кривизна которой равна кривизне кривой в данной точке. Радиус ρ такой окружности называется *радиусом кривизны*, а центр этой окружности – *центром кривизны*.

Вывод: кривизна кривой в данной точке есть величина, обратная радиусу кривизны в этой точке $k = \dfrac{1}{\rho}$.

Очевидно, что кривизна прямой линии равна нулю, а радиус кривизны равен бесконечности.

При естественном способе задания движения точки ускорения точки находят в виде суммы двух ускорений: касательного a_τ и нормального a_n (рис. 6.6) [4], т. е.

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \quad \bar{a}_\tau = \ddot{s}\tau; \quad \bar{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\bar{n},$$

где $\bar{n}$ – орт нормали (главной нормали) к траектории;

$\bar{a}_n$ – нормальное ускорение, которое характеризует изменение скорости по направлению;

$\bar{a}_\tau$ – касательное ускорение, характеризующее изменение скорости по модулю.

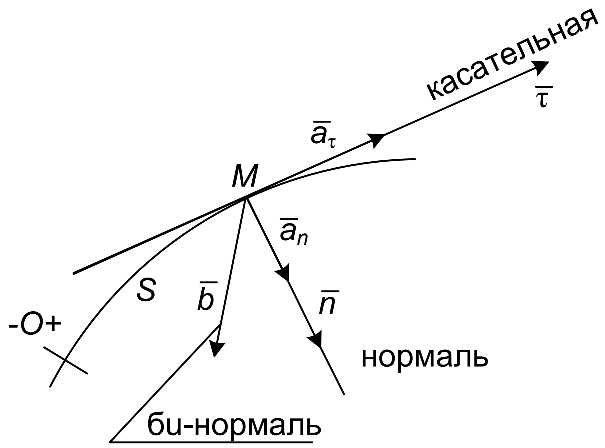


Рис. 6.6. Касательные и нормальные ускорения точки

При равномерном движении v_τ = const, $a_\tau = 0$, т. е. касательное ускорение возникает тогда, когда изменяется модуль скорости, т. е. при неравномерном движении; нормальное ускорение возникает тогда, когда изменяется направление скорости.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Опишите способы задания движения точки.

2. Каковы скорость и ускорение точки при различных способах задания движения точки?

3. Что такое кривизна криволинейной траектории движения точки?

Контрольная задача

Задача относится к кинематике точки, способ задания движения координатный. Для определения скорости и ускорения точки следует найти их проекции на координатные оси. Используя найденные значения скорости и ускоения, можно определить касательное и нормальное ускорения точки, а также радиус кривизны траектории. Исходные данные приведены в таблице.

Таблица

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра	Значения 2-й цифры шифра	Значения 3-й цифры шифра	
	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	$z = f_3(t)$, см	t_1, см
1	$t^3 + 1$	$\sin\pi t$	$\sin^2\pi t$	1
2	$2t^2 – 2$	$\cos\pi t$	$\cos^2\pi t$	2
3	$3t^4 – 3$	$\sin\pi t / 2$	$\sin^2\pi t / 2$	3
4	$t^3 – 4$	$\cos\pi t / 2$	$\cos^2\pi t / 2$	1
5	$3t^2 + 5$	$\sin\pi t / 3$	$\sin^2\pi t / 3$	2
6	$4t – 6$	$\cos\pi t / 3$	$\cos^2\pi t / 3$	3
7	$t^3 + 7$	$\sin\pi t / 4$	$\sin^2\pi t / 4$	1
8	$4t^2 – 8$	$\cos\pi t / 4$	$\cos^2\pi t / 4$	2
9	$5t + 9$	$\sin\pi t / 6$	$\sin^2\pi t / 6$	3
0	$t^2 + 10$	$\cos\pi t / 6$	$\cos^2\pi t / 6$	1

Условие

Движение точки задано уравнениями в декартовых координатах: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, (x, y, z в см, t в с). Определить величину и направление скорости и ускорения точки, а также радиус кривизны траектории в момент времени t_1, см.

Пример решения

Условие. Уравнения движения точки в декартовых координатах имеют следующий вид:

$$x = t^2 +10,\ y = \cos\frac{\pi t}{6},\ z = \cos^2\frac{\pi t}{6} \text{ (для момента времени } t_1 = 1 \text{ с).}$$

Решение. Определим проекции скорости на оси декартовых координат в указанный момент времени:

$$v_x = \dot{x} = 2t,\ v_x(t_1) = 2 \text{ см/с};$$

$$v_y = \dot{y} = -\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi t}{6}, \quad v_y(t_1) = -\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12} = -0,262 \text{ см/с};$$

$$v_z = \dot{z} = 2\cos\frac{\pi t}{6}\left(-\sin\frac{\pi t}{6}\right)\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{6}\sin\frac{\pi t}{6} = -\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi t}{3};$$

$$v_z(t_1) = -\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} = -0,453 \text{ см/с}.$$

Определим модуль скорости точки в указанный момент времени:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{2^2 + 0,262^2 + 0,453^2} = 2,067 \text{ см/с}.$$

Направление вектора скорости в данный момент времени определим с помощью направляющих косинусов:

$$\cos\left(\bar{v},\bar{i}\right) = \frac{v_x}{v} = \frac{2}{2,067} = 0,968, \ \left(\bar{v},\bar{i}\right) = 14,6°;$$

$$\cos\left(\bar{v},\bar{j}\right) = \frac{v_y}{v} = \frac{-0,262}{2,067} = -0,127, \ \left(\bar{v},\bar{j}\right) = 97,3°;$$

$$\cos\left(\bar{v},\bar{k}\right) = \frac{v_z}{v} = \frac{-0,453}{2,067} = -0,219, \ \left(\bar{v},\bar{k}\right) = 102,7°.$$

Определим проекции ускорения на оси декартовых координат в указанный момент времени:

$$a_x = \dot{v}_x = 2, \quad a_x(t_1) = 2 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \dot{v}_y = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi t}{6}, \quad a_y(t_1) = -\frac{\pi^2}{36}\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{36}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,237 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = \dot{v}_z = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3}, \quad a_z(t_1) = -\frac{\pi^2}{18}\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2}{36} = -0,274 \text{ см/с}^2.$$

Определим модуль ускорения точки в указанный момент времени:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + 0,237^2 + 0,274^2} = 2,032 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора ускорения в данный момент времени определим с помощью направляющих косинусов:

$$\cos\left(\bar{a},\bar{i}\right) = \frac{a_x}{a} = \frac{2}{2,032} = 0,984, \ \left(\bar{a},\bar{i}\right) = 10,2°;$$

$$\cos\left(\overline{a},\overline{j}\right)=\frac{a_y}{a}=\frac{-0,237}{2,032}=-0{,}117,\quad \left(\overline{a},\overline{j}\right)=96,7^\circ;$$

$$\cos\left(\overline{a},\overline{k}\right)=\frac{a_z}{a}=\frac{-0,274}{2,032}=-0{,}135,\quad \left(\overline{a},\overline{k}\right)=97,7^\circ.$$

Найдем модуль проекции ускорения точки на касательную (модуль касательного ускорения точки) через значения проекций скорости и ускорения на оси координат:

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\right)=\frac{v_x a_x+v_y a_y+v_z a_z}{v}.$$

Для заданного момента времени t_1

$$a_\tau=\frac{2\cdot 2+0,262\cdot 0,237+0,453\cdot 0,274}{2,067}=2,025\text{ см/с}^2.$$

Модуль проекции ускорения точки на нормаль (нормальное ускорение) точки найдем из соотношения $a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}$. Для заданного момента времени t_1 $a_n=\sqrt{2{,}032^2-2{,}025^2}=0{,}169$ см/с^2.

Радиус кривизны траектории ρ найдем из формулы для нормального ускорения точки $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$, откуда $\rho=\dfrac{v^2}{a_n}$.

В нашем случае $\rho=\dfrac{2,067^2}{0{,}169}=25{,}3$ см.

Глава 7. Поступательное и вращательное движение твердого тела

7.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение – это движение тела, при котором всякая прямая, взятая в теле, остается параллельной своему начальному направлению [4].

При поступательном движении (рис. 7.1) траектории всех точек одинаковы и при наложении совпадают, т. е. $\overline{\Delta r_A}=\overline{\Delta r_B}=\overline{\Delta r_C}$.

Если тело движется поступательно, то выполняются соотношения $\overline{r_A}=\overline{r_A}(t)$; $\overline{r_B}=\overline{r_A}+\overline{r_{AB}}$.

Поэтому уравнение движения какой-либо точки является уравнением поступательного движения всего тела.

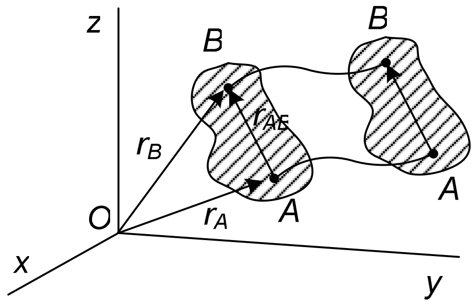


Рис. 7.1. Поступательное движение твердого тела

Если тело движется поступательно, то все его точки имеют одинаковые скорости и ускорения: $\bar{V}_A = \bar{V}_B = \bar{V}$; $\bar{a}_A = \bar{a}_B = \bar{a}$.

7.2. Вращательное движение твердого тела вокруг оси

Вращательное движение вокруг неподвижной оси – это движение твердого тела, две точки которого (или две точки, неизменно связанные с телом) остаются неподвижными в данной системе отсчета [4]. Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется *осью вращения* (рис. 7.2).

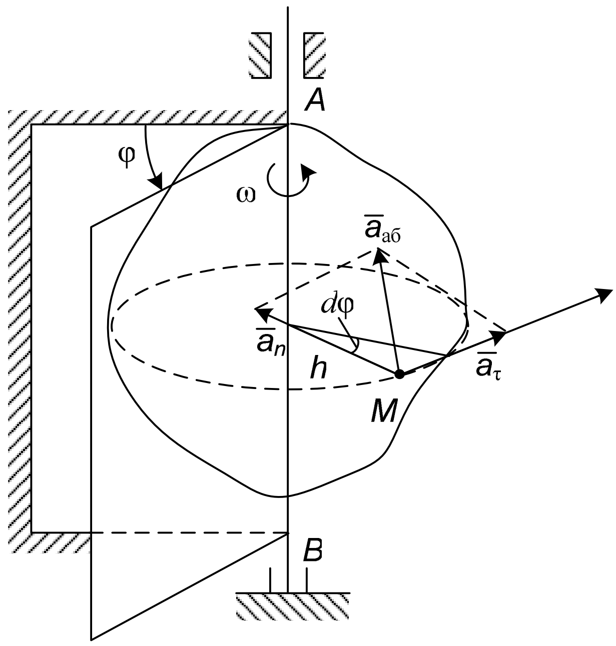


Рис. 7.2. Вращательное движение твердого тела

7.3. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Известно уравнение вращательного движения твердого тела (см. рис. 7.2):

$$\varphi = \varphi(t),$$

где φ – угол поворота, рад.

Обозначим угловую скорость ω, C^{-1}; угловое ускорение – ε, C^{-2}; линейную скорость – υ , м/с; линейные ускорения точки вращающегося твердого тела – $a_{аб}$; a_n; a_τ.

Для того, чтобы найти линейную скорость и ускорение точки M твердого тела, действуем по следующему алгоритму.

1. Выбираем систему координат так, чтобы одна из осей координат z совпадала с осью вращения.

2. Составляем уравнение вращения твердого тела: $\varphi = \varphi(t)$.

3. Дифференцируя по времени угол поворота, определяем алгебраическую величину угловой скорости: $\omega = \dot{\varphi}$.

4. Вычисляя вторую производную от угла поворота по времени, находим величину углового ускорения: $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$.

5. Находим для данной точки вращательную скорость $\upsilon = \omega R$; нормальное или центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 R$; касательное или вращательное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$.

6. Находим полное ускорение и его направление: $a_{аб} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Каковы скорость и ускорение точки при поступательном движении твердого тела?

2. Дайте определение угловой скорости и ускорению при вращательном движении твердого тела.

3. Что такое нормальное и касательное ускорения точки твердого тела?

4. Дайте определение поступательного движения.

5. Дайте определение вращательного движения вокруг неподвижной оси.

Контрольная задача

Задача посвящена одному из простейших движений твердого тела – вращению твердого тела вокруг неподвижной оси. Исходные данные для различных вариантов приведены в таблице.

Таблица

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра		Значения 2-й цифры шифра		Значения 3-й цифры шифра				
	t_1, с	t_2, с	t_3, с	h, см	Номер условия	$\varphi = \varphi(t)$, рад	ω_1, $с^{-1}$	ω_2, $с^{-1}$	ε, $с^{-2}$
1	0,5	3	1	10	1	$t^3 + \sin(\pi t)$	–	–	–
2	1,0	4	2	15	1	$2t^2 - \cos(\pi t)$	–	–	–
3	1,5	5	3	20	1	$3t + \sin^2(\pi t / 2)$	–	–	–
4	2,0	6	4	25	1	$4t - \cos^2(\pi t / 2)$	–	–	–
5	2,5	7	5	30	2	–	50	65	–
6	0,5	3	6	35	2	–	55	70	–
7	1,0	4	7	40	2	–	60	75	–
8	1,5	5	8	45	3	–	20	–	1,0
9	2,0	6	9	50	3	–	30	–	1,5
0	2,5	7	10	55	3	–	40	–	2,0

Условия

1. По заданному уравнению вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси $\varphi = \varphi(t)$ определить: 1) угловую скорость и угловое ускорение тела в момент времени t_1; 2) скорость и ускорение точки тела, отстоящей на расстоянии h от оси в момент t_2; 3) число оборотов тела N за время t_3.

2. Диск, вращающийся равноускоренно вокруг неподвижной оси, в моменты времени t_1 и t_2 имеет угловые скорости ω_1 и ω_2 соответственно. Определить: 1) скорость и ускорение точки, отстоящей на расстоянии h от оси, в момент t_2; 2) число оборотов тела N за время t_3; 3) уравнение вращательного движения диска, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$.

3. Тело, вращаясь равноускоренно с угловым ускорением ε, имеет в момент времени t_1 угловую скорость ω_1. Определить: 1) скорость и ускорение точки тела, отстоящей на расстоянии h от оси в момент t_2; 2) число оборотов тела N за время t_3; 3) уравнение вращательного движения тела, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$.

Пример решения

Условие. Тело, вращаясь равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с, имеет в момент времени $t_1 = 2{,}5$ с угловую скорость $\omega_1 = 40$ рад/с. Определить: 1) скорость и ускорение точки тела, отстоящей на расстоянии $h = 55$ см от оси вращения в момент $t_2 = 7$ с; 2) число оборотов N тела за время $t_3 = 10$ с; 3) уравнение вращательного движения тела, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$.

Решение. При равноускоренном вращении угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. Зная значение угловой скорости ω_1 в некоторый момент времени t_1 и угловое ускорение ε, можно найти начальную угловую скорость ω_0 (при $t_0 = 0$): $\omega_0 = \omega_1 + \varepsilon t_1 = 40 - 2 \cdot 2{,}5 = 35$ рад/с. Отсюда угловая скорость тела в момент времени $t_2 = 7$ с будет равна $\omega_2 = \omega_0 + \varepsilon t_2 = 35 + 2 \cdot 7 = 49$ рад/с.

Скорость v и ускорение a точки M тела, отстоящей на расстоянии $h = 55$ см от оси вращения, в момент времени $t_2 = 7$ с будут равны:

$$v = \omega_2 \cdot h = 49 \cdot 55 = 2695 \text{ см/с} = 26{,}95 \text{ м/с};$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h = 2 \cdot 55 = 110 \text{ см/с}^2 = 1{,}10 \text{ м/с};$$

$$a_n = \omega^2 \cdot h = 49^2 \cdot 55 = 132055 \text{ см/с} = 1320 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1{,}10^2 + 1320{,}6^2} = 1320{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Направление векторов скорости и ускорений указаны на рис. 7.3.

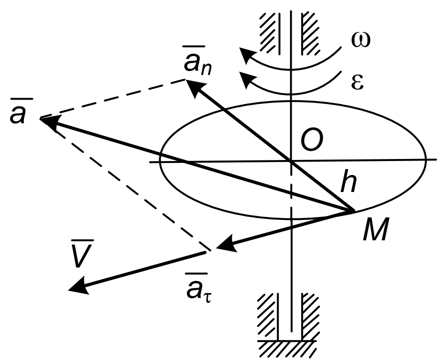


Рис. 7.3. Направление векторов скорости и ускорений

Число оборотов тела N за время $t_3 = 10$ с определим по соотношению

$$N = \int_0^t n(t)dt,$$

где $n(t)$ – число оборотов тела за секунду в данный момент времени.

Определим его по формуле

$$n(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\omega_0 + \varepsilon t\right).$$

В рассматриваемой задаче число оборотов тела N за время t_3 будет равно

$$N = \int_0^{10} \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\omega_0 + \varepsilon t\right)dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(35\cdot 10 + 2\frac{10^2}{2}\right) = 71{,}6 \text{ об.}$$

Уравнение вращательного движения тела $\varphi = \varphi(t)$ получим из соотношения $\varphi(t) = d\varphi / dt$, умножив обе его части на дифференциал времени dt: $d\varphi = \omega(t)dt$. Интегрируя полученное дифференциальное уравнение с учетом начальных условий ($t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$)

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{t} (\omega_0 + \varepsilon t)dt,$$

получим $\varphi = \omega_0 t + \varepsilon\cdot\frac{t^2}{2} = 35t + t^2$, рад.

Глава 8. Сложное движение точки

8.1. Относительное, переносное и абсолютное движения

Часто при решении инженерных задач удобно рассматривать движение точки или тела по отношению к двум системам отсчета, одна из которых условно неподвижна, а другая определенным образом движется по отношению к первой (например, шар, катящийся по палубе движущегося парохода).

Движение точки по отношению к неподвижной (основной) системе отсчета называется *абсолютным*. Движение точки по отношению к подвижной системе отсчета – *относительным*. Движение подвижной системы отсчета по отношению к основной – *переносным движением*.

В соответствии с этими определениями движения и кинематические параметры называются абсолютными, относительными и переходными (абсолютная скорость, относительная траектория и т. д.) [1, 4].

Для изучения относительного движения нужно отвлечься от переносного движения – поместить наблюдателя в подвижную систему отсчета.

Для изучения переносного движения нужно абстрагироваться от относительного движения, т. е. следить за движением той точки подвижной системы, с которой в рассматриваемый момент времени совпадала данная точка.

При решении задачи, относящейся к сложному движению, необходимо придерживатсья определенной последовательности действий.

1. Разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения.

2. Выбрать две системы координат – абсолютную и подвижную.

3. Мысленно остановив переносное движение, определить скорость и ускорение в относительном движении.

4. Мысленно отвлекаясь от относительного движения, найти угловую скорость переносного движения, скорость и ускорение точки в переносном движении.

8.2. Теорема о сложении скоростей (теорема параллелограмма скоростей)

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей [4]:

$$\bar{v}_{\text{аб}} = \bar{v}_{\text{от}} + \bar{v}_{\text{пер}},$$

где $\bar{v}_{\text{аб}}$ – абсолютная скорость точки;

$\bar{v}_{\text{от}}$ – скорость точки в относительном движении;

$\bar{v}_{\text{пер}}$ – скорость точки в переносном движении.

Скорости $\bar{v}_{\text{аб}}$, $\bar{v}_{\text{от}}$, $\bar{v}_{\text{пер}}$ направлены соответственно по касательным в точке к абсолютной, переносной и относительной траекториям.

Значение абсолютной скорости по модулю вычисляется по формуле

$$v_{\text{аб}} = \sqrt{v_{\text{от}}^2 + v_{\text{пер}}^2 + 2v_{\text{от}}v_{\text{пер}}\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\bar{v}_{\text{от}}$ и $\bar{v}_{\text{пер}}$.

8.3. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Если переносное движение не является поступательным, то абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: переносного, относительного и кориолисова [4].

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}},$$

где $\bar{a}_{\text{аб}}$ – абсолютное ускорение точки;

$\bar{a}_{\text{от}}$ – относительное ускорение точки;

$\bar{a}_{\text{пер}}$ – переносное ускорение точки;

$\bar{a}_{\text{кор}}$ – вектор кориолисова ускорения точки.

Вектор кориолисова ускорения точки равен удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости переносного вращения на вектор относительной скорости точки $\bar{a}_{\text{кор}} = 2\bar{\omega}_{\text{пер}} \cdot 2\bar{v}_{\text{от}}$. Модуль кориолисова ускорения точки равен удвоенному произведению модуля угловой скорости переносного вращения на модуль относительной скорости точки и на синус угла между вектором относительной скорости и осью вращения

$$a_{\text{кор}} = 2|\omega| \cdot |v_{\text{от}}| \sin\alpha .$$

Направление кориолисова ускорения можно вычислить следующим образом: спроектировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию $V_{\text{от}}$ на прямой угол в сторону переносного вращения.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое абсолютное, относительное и переносное движение точки?
2. В чем суть теоремы параллелограмма скоростей?
3. В чем суть теоремы Кориолиса о сложении ускорений?
4. Дайте определение величины и направления кориолисова ускорения.

Контрольная задача

Данная задача посвящена сложному движению точки [2]. Для определения абсолютной скорости точки необходимо найти ее относительную и переносную скорости и воспользоваться теоремой параллелограмма скоростей. Исходные данные представлены в таблице и на рис. 8.1.

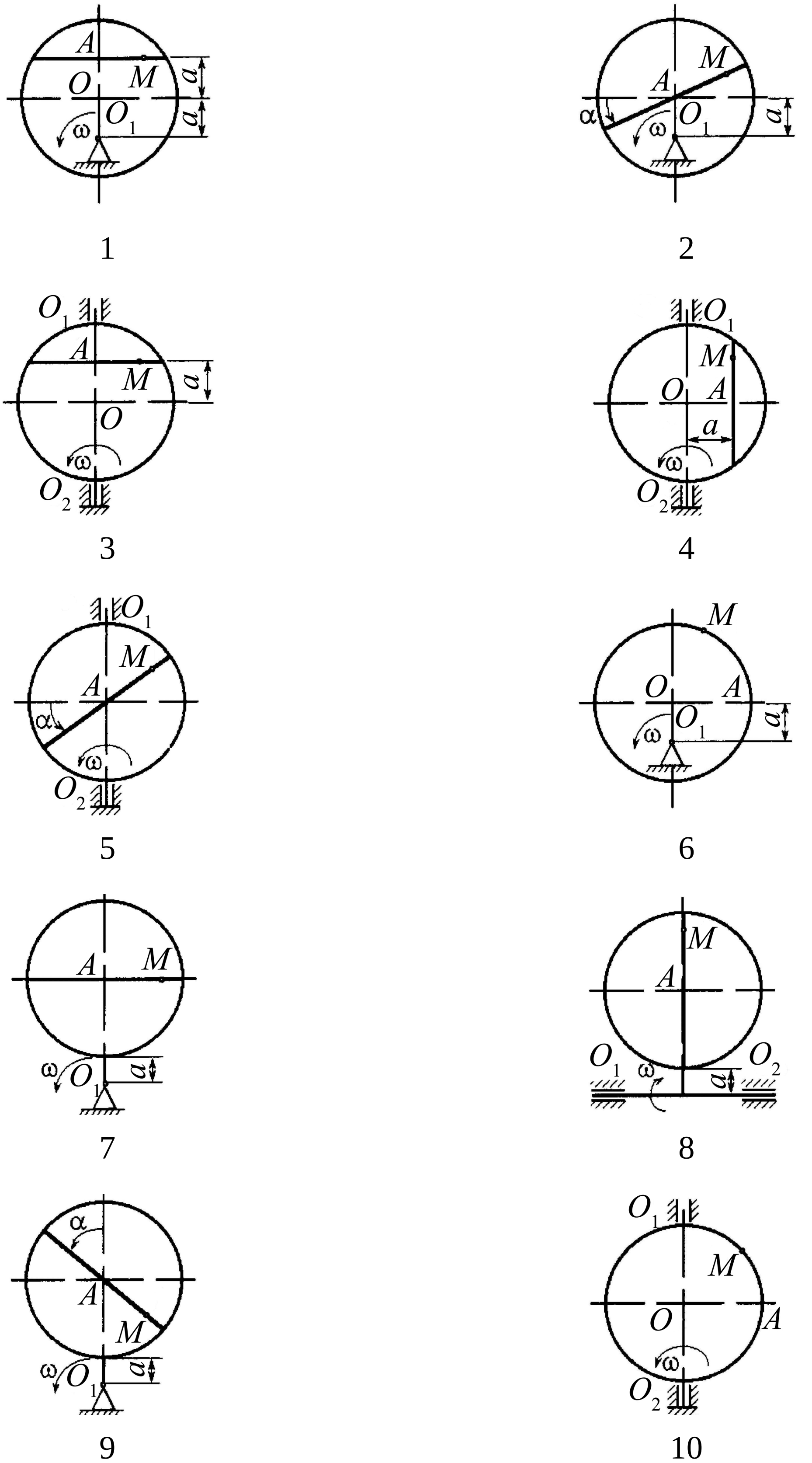


Рис. 8.1. Схемы к задаче:

точка *M* изображена на схемах в области положительных значений дуговой координаты

Условие

Точка M движется по хорде диска (рис. 8.1, схемы 1, 3, 4), по диаметру (см. рис. 8.1, схемы 2, 5, 7, 8, 9) или ободу (см. рис. 8.1, схемы 6, 10) согласно заданному закону $s = |AM| = f(t)$. Диск вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O_1 и перпендикулярной плоскости диска (см. рис. 8.1, схемы 1, 2, 6, 7, 9), или вокруг оси O_1O_2, лежащей в плоскости диска (см. рис. 8.1, схемы 3, 4, 5, 8, 10), в направлении, указанном стрелкой, с постоянной угловой скоростью ω. Определить абсолютную скорость точки M в момент времени t_1.

Таблица

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра		Значения 2-й цифры шифра		Значения 3-й цифры шифра		
	$AM = s = f(t)$, см	t_1, с	ω, $с^{-1}$	R, см	Номер схемы (см. рис. 8.1)	α, град	a, см
1	$30\sin\pi t / 6$	1	5	60	1	–	10
2	$20(t^2 - t)$	2	4	70	2	30	15
3	$25(1 - \cos\pi t / 4)$	3	3	80	3	–	20
4	$3t^2$	4	2	60	4	–	25
5	$40\sin\pi t / 3$	5	1	70	5	45	–
6	$90(\cos\pi t / 4 - 1)$	1	5	80	6	–	30
7	$15(t + \sin\pi t / 2)$	2	4	60	7	–	10
8	$20(t - \sin\pi t / 6)$	3	3	70	8	–	15
9	$2(t^2 + t)$	4	2	80	9	60	20
0	$8(t + \sin\pi t / 3)$	5	1	60	10	–	–

Пример решения

Условие. Точка M движется по ободу диска радиусом $R = 20$ см согласно закону $s = AM = 6t\sin(\pi t / 3)$. Диск вращается вокруг неподвижной оси O_1O_2, лежащей в плоскости диска, в направлении, указанном стрелкой, с постоянной угловой скоростью $\omega = 0{,}5$ рад/с. Определить абсолютную скорость точки M в момент времени $t_1 = 5$ с (рис. 8.2).

Решение. В данной задаче относительное движение точки – движение по ободу диска относительной системы отсчета, связанной с диском; переносное движение – вращение вместе с диском вокруг неподвижной оси; абсолютное движение – движение точки относительно неподвижной оси.

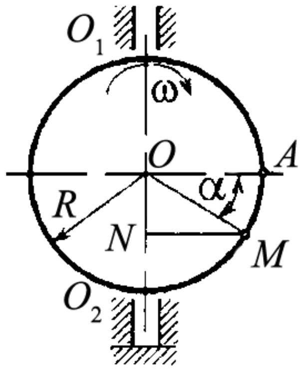


Рис. 8.2. Схема решения задачи

Определим параметры относительного движения точки:

а) положение точки M в заданный момент времени t = 5 с:

$$AM = 6 \cdot 5 \sin\frac{5\pi}{3} = 30 \cdot (-0{,}866) = -25{,}98 \text{ см}.$$

Знак «минус» означает, что точка M в рассматриваемый момент времени находится в области отрицательных значений дуговой координаты s;

б) определим центральный угол α и отрезок MN:

$$\alpha = \frac{|AM|}{R} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{29{,}98 \cdot 180}{60\pi} = 24{,}8^\circ;$$

$$MN = R \cdot \cos\alpha = 60 \cdot \cos 24{,}8^\circ = 54{,}5 \text{ см};$$

в) найдем проекцию относительной скорости $v_{\text{отн}}$ точки M на касательную в данный момент времени (рис. 8.3.):

$$v_{\text{отн}} = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6 \cdot t \cdot \sin\frac{\pi t}{3}\right) = 6\sin\frac{\pi t}{3} + 2\pi t\cos\frac{\pi t}{3};$$

$$v_{\text{отн}} = 6\sin\frac{\pi 5}{3} + 2\pi 5\cos\frac{\pi 5}{3} = -6 \cdot 0{,}866 + 10 \cdot \pi \cdot 0{,}5 = 10{,}5 \text{ см/с}.$$

Определим модуль переносной скорости точки M как вращательной скорости той точки диска, где в данное мгновение находится движущаяся точка M (см. рис. 8.3):

$$v_{\text{пер}} = \omega MN = 0{,}5 \cdot 54{,}5 = 27{,}25 \text{ см}.$$

Вектор переносной скорости перпендикулярен плоскости диска и направлен в сторону его вращения.

Модуль абсолютной скорости точки M (см. рис. 8.3.) найдем по формуле

$$v_{абс} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{отн}v_{пер}\cos(\overline{v}_{отн}, \overline{v}_{пер})} = \sqrt{10{,}5^2 + 27{,}25^2} = 29{,}2 \text{ см/с}.$$

Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали прямоугольника, построенного на относительной и переносной скоростях как сторонах.

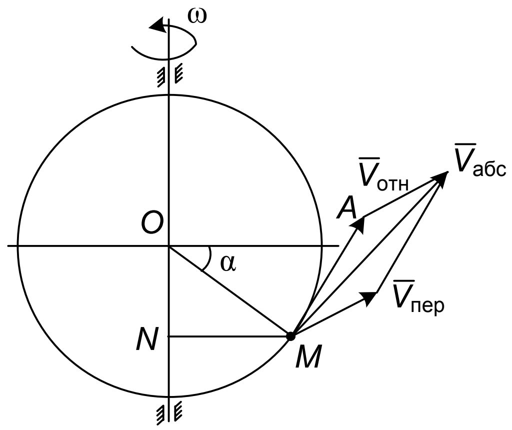


Рис. 8.3. Схема решения задачи

Абсолютное ускорение $\overline{a}$ точки M равно (рис. 8.4) геометрической сумме относительного $\overline{a}_{отн}$, переносного $\overline{a}_{пер}$ и кориолисова $\overline{a}_{кор}$ ускорений:

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{отн} + \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{кор},$$

или, с учетом условий задачи, в развернутом виде

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{отн}^{\tau} + \overline{a}_{отн}^{n} + \overline{a}_{пер}^{n} + \overline{a}_{кор},$$

где при $t_1 = 5$ с касательное ускорение в относительном движении составит:

$$a_{отн}^{\tau} = \frac{dv_{отн}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6\sin\frac{\pi t}{3} + 2\pi t\cos\frac{\pi t}{3}\right) = 4\pi\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{2\pi^2}{3}t\sin\frac{\pi t}{3} = 28{,}5 \text{ см/с}^2;$$

нормальное ускорение в относительном движении будет равно:

$$a_{отн}^{n} = \frac{V_{отн}^2}{R} = \frac{15{,}7^2}{60} = 4{,}1 \text{ см/с}^2;$$

нормальное ускорение в переносном движении:

$$a_{пер}^{n} = \omega^2 NM = 0{,}5^2 \cdot 54{,}5 = 13{,}6 \text{ см/с}^2;$$

кориолисово ускорение:

$$a_{кор} = 2\omega V_{отн}\sin\left(\overline{\omega},^{\wedge}\overline{V}_{отн}\right) = 2\cdot 0{,}5\cdot 15{,}7\sin 24{,}8^{\circ} = 6{,}6 \text{ см/с}^2.$$

Положительный знак $a^n_{\text{отн}}$ показывает, что вектор $\overline{a}^n_{\text{отн}}$ направлен в сторону положительных значений S; вектор $\overline{a}^n_{\text{отн}}$ направлен по нормали к траектории движения точки в относительном движении, т. е. по нормали к окружности радиусом MN – к ее центру, вектор $\overline{a}_{\text{кор}}$ направлен согласно правилу векторного произведения векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{V}_{\text{отн}}$ (см. рис. 8.4).

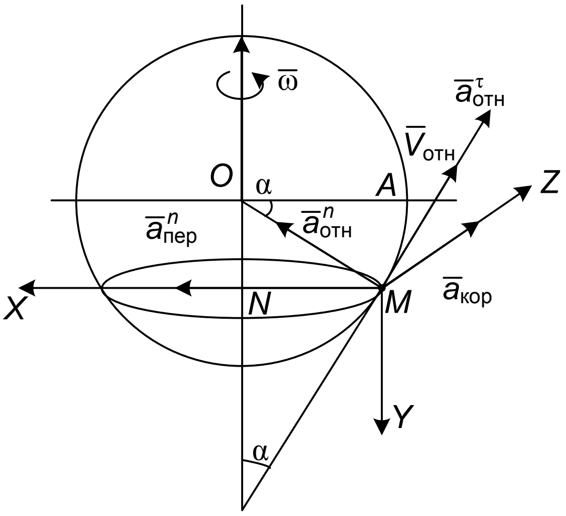


Рис. 8.4. Схема решения задачи

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекции на оси Оx, Оy и Оz (см. рис. 8.4):

$$a_{\text{абс}x} = a^n_{\text{пер}} + a^n_{\text{отн}}\cos\alpha - a^\tau_{\text{отн}}\sin\alpha = 13{,}6 + 4{,}1\cos 24{,}8° - \sin 24{,}8° = 5{,}37\ \text{см/с}^2;$$

$$a_{\text{абс}y} = -a^n_{\text{отн}}\sin\alpha - a^\tau_{\text{отн}}\cos\alpha = 4{,}1\sin 24{,}8° - 28{,}5\cos 24{,}8° = -27{,}6\ \text{см/с}^2;$$

$$a_{\text{абс}z} = -a_{\text{кор}} = 6{,}6\ \text{см/с}^2;$$

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a^2_{\text{абс}x} + a^2_{\text{абс}y} + a^2_{\text{абс}z}} = \sqrt{5{,}37^2 + \left(-27{,}6\right)^2 + 6{,}6^2} = 28{,}9\ \text{см/с}^2.$$

Направление вектора $\overline{a}_{\text{абс}}$ определяется его углами с осями координат:

$$(\overline{a}_{\text{абс}}, \overline{i}\,) = \arccos\frac{a_{\text{абс}x}}{a_{\text{абс}}} = \arccos\frac{5{,}37}{28{,}9} = 79{,}3°;$$

$$(\overline{a}_{\text{абс}}, \overline{j}\,) = \arccos\frac{a_{\text{абс}y}}{a_{\text{абс}}} = \arccos\frac{27{,}6}{28{,}9} = 162{,}7°;$$

$$(a_{\text{абс}}, \overline{k}\,) = \arccos\frac{a_{\text{абс}z}}{a_{\text{абс}}} = \arccos\frac{6{,}6}{28{,}9} = 76{,}8°.$$

Глава 9. Плоское движение твердого тела

Плоское движение – это движение твердого тела, при котором все точки тела движутся только в плоскостях, параллельных данной неподвижной плоскости [1, 4].

9.1. Уравнения плоского движения

Для изучения движения всего тела достаточно понять, как движется в плоскости Oxy сечение S (рис. 9.1) этого тела или некоторая плоская фигура S. Положение S в плоскости Oxy определяется положением *отрезка прямой AB* (рис. 9.2). Для описания движения точка A принимается за *полюс*; φ – угол между осью x и AB.

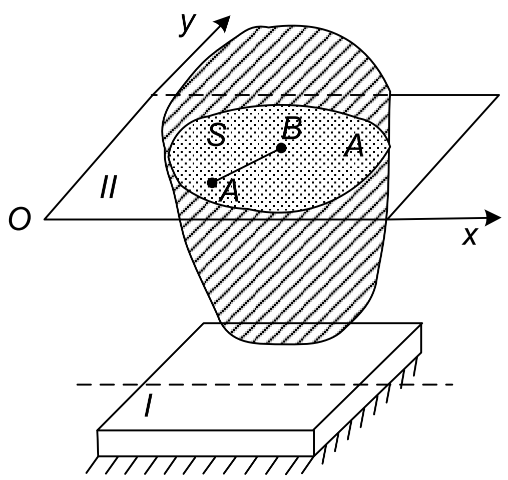


Рис. 9.1. Плоское движение твердого тела

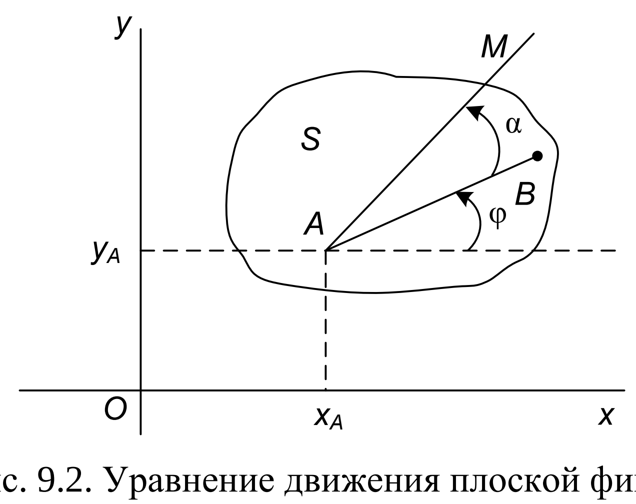


Рис. 9.2. Уравнение движения плоской фигуры

Координаты полюса x_A, y_A и угол φ при движении изменяются. Уравнения движения плоской фигуры в ее плоскости, т. е. *уравнения плоскопараллельного движения* будут иметь следующий вид (см. рис. 9.2):

$$x_A = f_1(t),$$

$$y_A = f_2(t),$$

$$\varphi = f_3(t).$$

Если φ = const – движение является поступательным.

Если x_A = const и y_A = const – движение будет вращательным.

9.2. Определение скоростей точек плоской фигуры

Мгновенный центр скоростей P – это точка плоской фигуры в плоскопараллельном движении, скорость которой в данный момент времени равна нулю, а скорости всех других точек плоской фигуры могут быть представлены как мгновенно вращательные вокруг этого полюса [4].

Некоторые частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

1. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка касания *P* – мгновенный центр скоростей. Например, качение колеса по рельсу (рис. 9.3).

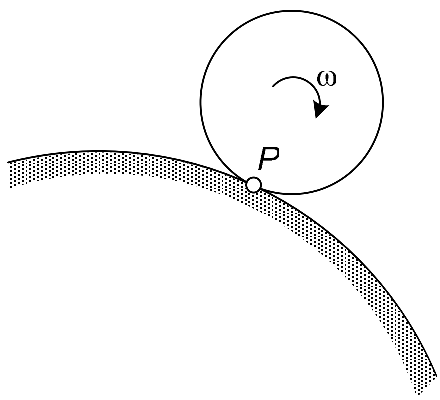


Рис. 9.3. Плоскопараллельное движение твердого тела

2. Если скорости точек *A* и *B* плоской фигуры параллельны друг другу (рис. 9.4), причем *AB* не перпендикулярна скорости $\bar{V}_A$, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны.

Скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу по модулю и направлению. Фигура имеет мгновенное поступательное изменение скоростей.

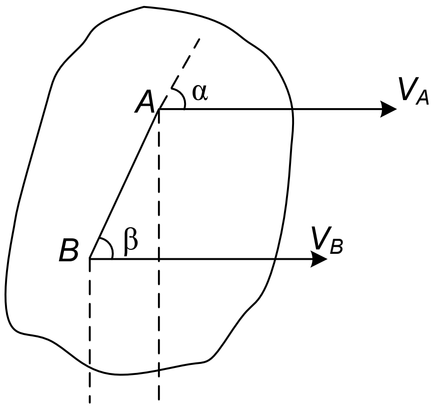


Рис. 9.4. Мгновенное поступательное изменение скоростей

3. Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB, соединяющая точки, перпендикулярна скоростям $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$, то мгновенный центр скоростей P (рис. 9.5) определяется построением. Для его определения необходимо знать направление и модуль скоростей $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$.

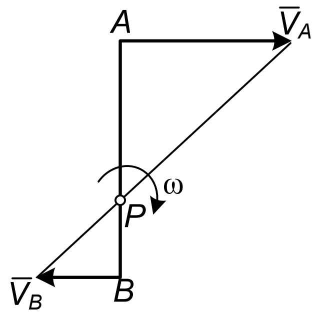


Рис. 9.5. Определение положения мгновенного центра скоростей

4. Если перпендикуляры к скоростям каких-либо точек A и B фигуры совпадают, то P лежит на отрезке прямой, соединяющей эти точки, и делит его на части, пропорциональные скоростям этих точек (рис. 9.6).

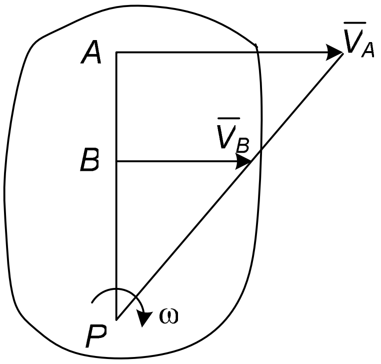


Рис. 9.6. Определение мгновенного центра скоростей

Если известны направления векторов скоростей двух точек плоской фигуры, то для определения мгновенного центра скоростей (рис. 9.7) необходимо из точек приложния скоростей восстановить к ним два перпендикуляра до их взаимного пересечения.

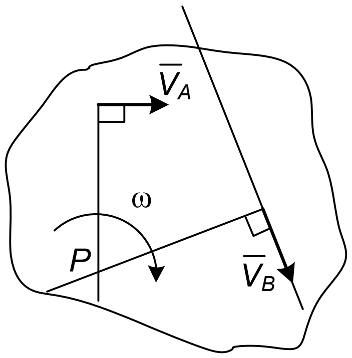


Рис. 9.7. Определение мгновенного центра скоростей

При этом следует помнить, что скорости точек плоской фигуры всегда пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

9.3. Определение ускорения точек плоской фигуры

Ускорение точки плоской фигуры можно найти так же, как и скорости, рассматривая движение фигуры как сложное, состоящее из переносного движения (поступательного вместе с полюсом) и относительного (вращение вокруг полюса).

Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме переносного ускорения, равного ускорению полюса, и относительного ускорения во вращательном движении с фигурой вокруг полюса [4].

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA},$$

где $\overline{a}_B$ – ускорение точки плоской фигуры;

$\overline{a}_A$ – ускорение точки A фигуры;

$\overline{a}_{BA}$ – относительное движение точки во вращательном движении точки вокруг полюса.

Относительное движение точки во вращательном движении точки с фигурой вокруг полюса можно разложить на два ускорения: центростремительное $\overline{a}_{BA}^n$, направленное по BA к полюсу, и вращательное $\overline{a}_{BA}^\tau$, направленное перпендикулярно к BA. Тогда

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau.$$

Численные значения $\overline{a}_{BA}^{n}$, $\overline{a}_{BA}^{\tau}$, $\overline{a}_{BA}$ находят по известным формулам

$$\overline{a}_{BA}^{n} = AB \cdot \omega^2; \quad \overline{a}_{BA}^{\tau} = AB \cdot \varepsilon; \quad \overline{a}_{BA} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}.$$

Часто, когда полюс A движется криволинейно и неравномерно, вместо ускорения $\overline{a}_A$ берут его нормальную и касательную составляющие, и тогда

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n} + \overline{a}_{BA}^{\tau}.$$

При этом все входящие в формулу величины являются векторными и складываются по правилам векторного сложения.

Если фигура в данный момент времени вращается вокруг полюса ускоренно, то $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ направлено в сторону вращения, если замедлено – то $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ направлено в сторону, противоположную вращению.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение скорости точки фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса.
2. Что такое мгновенный центр скоростей? Определите с его помощью скорости точек плоской фигуры.
3. Определите ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса.

Контрольная задача

Задача относится к плоскому движению твердого тела [2]. Скорость ползуна для данного положения механизма можно вычислить как с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек тела, так и мгновенного центра скоростей шатуна. Для этого необходимо знать скорость какой-нибудь точки шатуна (например точки A) и направление скорости ползуна.

Ускорение ползуна в данный момент времени можно найти с помощью векторной формулы распределения ускорений точек плоской фигуры, спроектировав ее на два взаимно перпендикулярных направления. В качестве полюса удобно принять точку A. Исходные данные к задаче даны в таблице.

Условие

Кривошип OA длиной R вращается вокруг неподвижной оси O с постоянной угловой скоростью ω и приводит в движение шатун AB длиной L и ползун B. Для заданного положения механизма найти скорость и ускорение ползуна B.

Примечание. Если при заданных значениях углов окажется, что шатун AB перпендикулярен направляющим ползуна (рис. 9.8, схемы 1, 6), то значение угла β следует принять равным 15°.

Таблица

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра		Значения 2-й цифры шифра		Значения 3-й цифры шифра	
	R, см	L, см	α, град	β, град	Номер схемы (рис. 9.8)	ω, $с^{-1}$
1	20	30	30	60	1	10
2	24	36	45	30	2	9
3	30	40	60	45	3	8
4	36	48	30	15	4	7
5	40	50	45	60	5	6
6	48	56	60	15	6	5
7	50	60	30	45	7	4
8	56	64	30	30	8	3
9	60	70	45	15	9	2
0	64	80	60	60	10	1

Пример решения

Условие. Кривошип OA длиной R = 64 см вращается вокруг неподвижной оси O с постоянной угловой скоростью ω = 1 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной L = 72 см и ползун B. Для положения механизма, заданного значениями углов α = 45°, β = 30°, найти скорость и ускорение ползуна B. Схема механизма приведена на рис. 9.9.

Решение. 1. Определим скорость точки A как вращательную вокруг неподвижной точки O по соотношению $v_A = \omega \cdot OA = 1 \cdot 64 = 64$ см/с. Для определения скорости точки B найдем положение мгновенного центра скоростей P, для чего покажем направление скоростей точек A и B, а затем из точек A и B восстановим перпендикуляры к их скоростям v_A и v_B. Точка пересечения перпендикуляров будет являться мгновенным центром скоростей P (см. рис. 9.9).

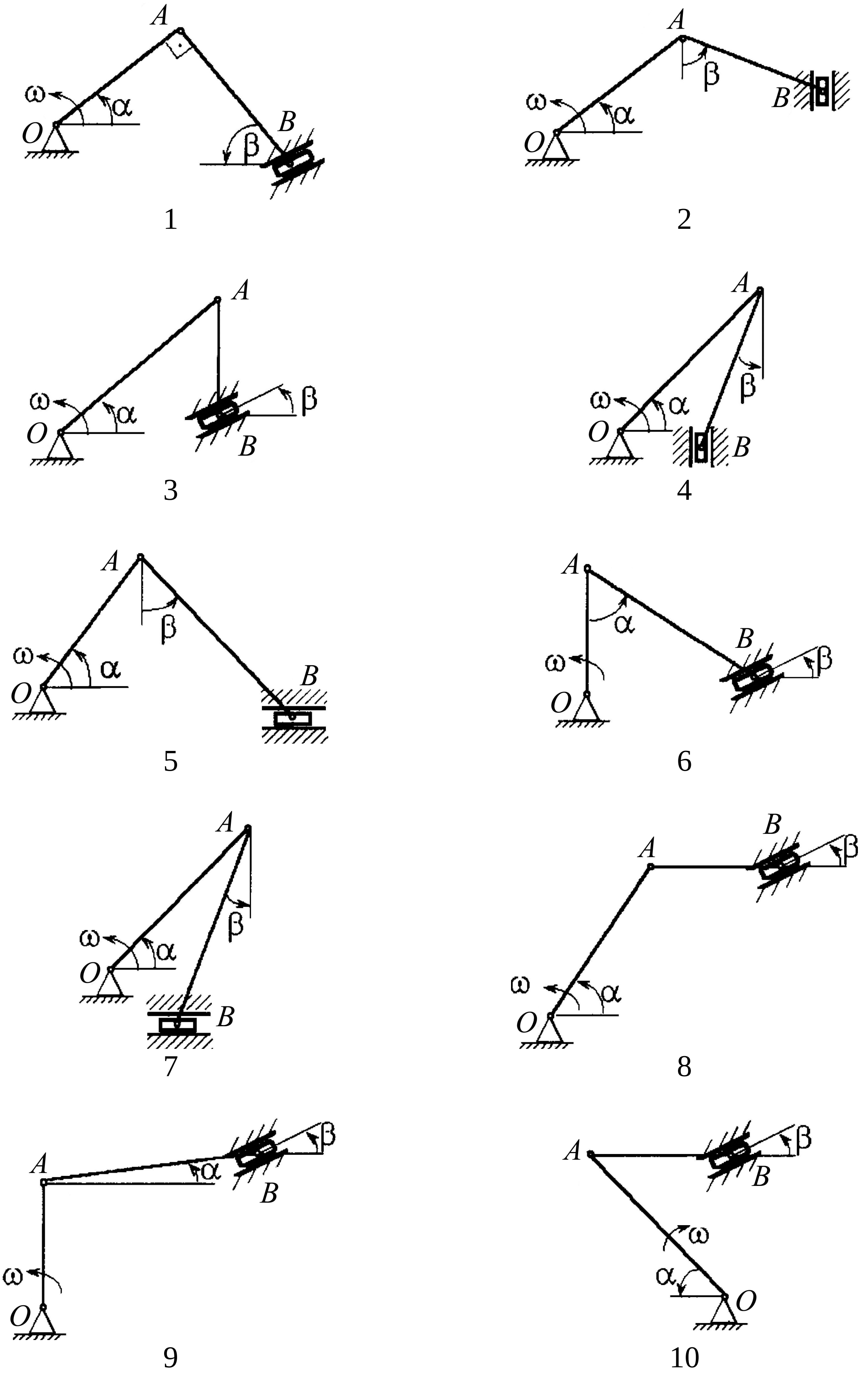


Рис. 9.8. Схемы к задаче

Рассмотрим движение шатуна в данный момент времени как вращательное относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P перпендикулярно неподвижной плоскости, по отношению к которой происходит плоское движение. Угловая скорость шатуна в этом соотношении $\omega_{AB} = v_A / AP$, а скорость ползуна B определяется как вращательная из соотношения $v_B = \omega_{AB}\, BP$.

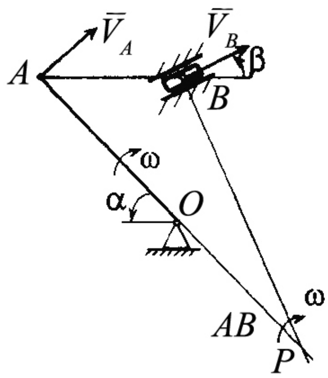


Рис. 9.9. Схема решения задачи

Расстояния AP и BP определим из решения треугольника ABP, применив теорему синусов. Для заданного положения механизма получим

$$\frac{AP}{\sin 120°} = \frac{AB}{\sin 15°} = \frac{BP}{\sin 45°},$$

откуда

$$AP = \frac{AB \cdot \sin 120°}{\sin 15°} = \frac{72 \cdot 0,866}{0,259} = 240,7 \text{ см},$$

$$BP = \frac{AB \cdot \sin 45°}{\sin 15°} = \frac{72 \cdot 0,707}{0,259} = 196,5 \text{ см}.$$

Подставив найденные значения расстояний в соответствующие формулы, получим

$$\omega_{AB} = \frac{64}{240,7} = 0,27 \text{ рад/с}, \; v_B = 0,27 \cdot 196,5 = 53,1 \text{ см/с}.$$

Направления скоростей показаны на рис. 9.9.

2. Для определения ускорения ползуна B воспользуемся векторным равенством:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

где $\bar{a}_B$ – ускорение ползуна B;

$\bar{a}_A$ – ускорение точки A, выбранной за полюс;

$\overline{a}_{BA}^{n}$ – нормальное ускорение точки B при ее вращении вокруг полюса A;

$\overline{a}_{BA}^{\tau}$ – касательное ускорение точки B при ее вращении вокруг полюса A.

Ускорение точки A кривошипа при равномерном вращении вокруг неподвижной оси O состоит только из осестремительной составляющей, модуль которой определяется формулой $a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 1 \cdot 64 = 64$ см/с^2. Вектор ускорения точки A направлен к оси вращения (рис. 9.10), $a_A = a_A^n = 64$ см/с^2.

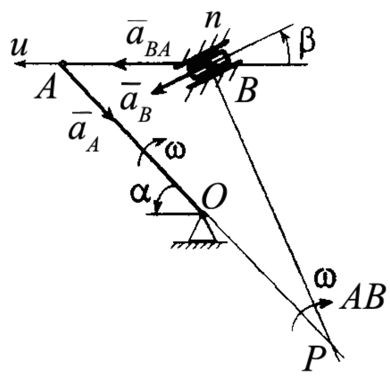


Рис. 9.10. Схема решения задачи

Осестремительное ускорение n точки B при ее вращении вокруг полюса A вычисляется следующим образом:

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,27^2 \cdot 72 = 5,25 \text{ см/с}^2.$$

Рассчитать вращательное ускорение $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ обычным способом не представляется возможным, так как величина углового ускорения звена AB неизвестна. Несмотря на это обстоятельство, векторное равенство позволяет найти ускорение ползуна B. Для этого воспользуемся тем, что нам известно направление вектора $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ (он перпендикулярен ускорению $\overline{a}_{BA}^{n}$) и вектора ускорения $\overline{a}_B$ (вдоль прямолинейной траектории точки B).

Проведем вектор ускорения $\overline{a}_B$ точки B, предполагая, что он направлен противоположно скорости точки B. Спроектируем векторное равенство на ось u, перпендикулярную ускорению $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ и проходящую через точки A и B. Получим $a_B \cdot \cos\beta = -a_A\cos\alpha + a_{BA}^n$. Отсюда

$$a_B = \frac{1}{\cos\beta} \cdot (-a_A \cos\alpha + a_{BA}^n) = \frac{1}{\cos 30^\circ}(-64 \cdot \cos 45^\circ + 5,25) =$$

$$= \frac{1}{0,866} \cdot (-64 \cdot 0,707 + 5,25) = -34,64 \text{ см/с}^2.$$

Знак «минус» показывает, что истинное направление ускорения точки B противоположно принятому.

Часть III. ДИНАМИКА

Динамика – раздел механики, в котором изучается движение материальных объектов в зависимости от действующих на них сил [1, 4].

Сила считается в механике основным, первичным понятием. Свойства сил, приложенных к твердому телу и точке, рассматривались в статике. В динамике силы оцениваются по их динамическому действию, т. е. по изменению ими характеристик движения материальных объектов.

Движение материальных объектов следует рассматривать относительно определенной системы отсчета. Оно совершается в пространстве с течением времени. В классической механике пространство считается трехмерным (евклидовым), его свойства не зависят от движущихся в нем материальных объектов. Время в классической механике инвариантно по отношению к выбору системы координат.

В основу классической механики положены законы или аксиомы И. Ньютона, которые были получены им путем обобщения целого ряда опытных данных и теоретических исследований.

Глава 10. Основные понятия и определения динамики

Как показывают наблюдения и опыт, одна и та же сила, действующая на разные по массе тела, сообщает им за один и тот же промежуток времени разные изменения скорости. Это свойство материальных тел изменять свою скорость быстрее или медленнее под действием приложенных сил называется *инертностью*. Инертность тела зависит от количества вещества, содержащегося в данном теле, а при поступательном движении – от его распределения в теле. За *меру инертности* тела при поступательном движении принимают постоянную скалярную положительную величину, называемую *массой тела*; при вращательном движении мерой инертности тела является *момент инерции*.

Простейшим объектом, движение которого рассматривается в динамике, является материальная точка. Как известно, под *материальной точкой* понимается тело, размерами которого при рассмотрении его движения можно пренебречь. Иногда тело конечных размеров в динамике тоже принимают за материальную точку; это делается в тех случаях, когда движения отдельных точек тела не отличаются друг от друга, т. е. при поступательном движении тела. Следует помнить, что материальная точка есть абстрактный образ тела или его части, представляющий собой геометрическую точку с массой, равной массе всего тела или его части.

Мысленно выделенная по какому-либо признаку совокупность механически взаимодействующих материальных точек или тел называется механической системой или просто системой. Движение каждой материальной точки (или просто точки), входящей в систему, зависит от движения остальных точек системы. Материальное тело (твердое, упругое жидкое, газообразное, любая машина, любое сооружение) в динамике рассматривается как механическая система. *Механическими системами* являются совокупности дискретных (отдельных) точек или тел, связанных между собой механическим взаимодействием.

Различают механические системы неизменяемые и изменяемые.

В *неизменяемой системе* расстояния между точками остаются неизменными; примером такой системы является абсолютно твердое тело.

В *изменяемой системе* расстояния между точками изменяются; такими системами являются упругие, жидкие, газообразные тела, механизмы и т. д.

В основе динамики, как и всей теоретической механики, лежат законы, открытые Г. Галилеем и И. Ньютоном которые впервые были четко сформулированы Ньютоном в его классическом трактате «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) Эти законы обычно именуются законами (аксиомами) Ньютона, а механика, основанная на них, называется классической или ньютоновской механикой [4].

Основоположником динамики является итальянский ученый Г. Галилей (1564–1642). Он впервые ввел в механику понятие скорости и ускорения движущейся точки при неравномерном прямолинейном движении и установил законы падения тел в пустоте. Г. Галилей сформулировал первый закон динамики – закон инерции, установил, что движение тела, брошенного под углом к горизонту в пустоте, совершается по параболе.

Область применения законов классической механики ограничена. Эти законы не согласуются с опытом при изучении движения тел, скорость которых одного порядка со скоростью света.

Новая релятивистская механика (теория относительности), созданная в начале XX в. немецким физиком А. Эйнштейном (1879–1955), коренным образом изменила принятые в механике представления о пространстве, времени, массе и энергии. Однако результаты, полученные на основе законов классической и релятивистской механики для тел, скорость которых несоизмеримо меньше скорости света, практически совпадают.

В свете теории относительности классическая механика приобрела характер ее частного случая теории относительности и сохраняет свое значение и в настоящее время, являясь научно-теоретической базой большинства отраслей техники. На основе законов Галилея–Ньютона в дальнейшем доказывались теоремы и устанавливались принципы механики, составившие содержание современного курса теоретической механики.

Законы И. Ньютона описывают движение свободной материальной точки, на которую либо не действуют силы, либо действует одна или несколько сил, и устанавливают связь между массой точки, силами, действующими на нее, и ускорением, вызываемым этими силами.

10.1. Основные законы динамики

10.1.1. Первый закон – закон инерции

Материальная точка, на которую не действуют силы, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.

Движение, совершаемое материальной точкой, на которую не действуют силы или действует уравновешенная система сил, называется *движением по инерции* или инерциальным.

Из закона инерции вытекает, что если точка движется с переменной скоростью, т. е. если она имеет ускорение, то на эту точку действует сила. Связь между силой, действующей на точку, и ускорением, которое она сообщает точке, устанавливается вторым законом Ньютона.

10.1.2. Второй закон – основной закон динамики – закон зависимости между силой и ускорением

Сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, имеющее направление силы и по модулю пропорциональное модулю силы [4].

Математически закон записывается в следующем виде:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F},$$

где m – масса точки;

$\overline{a}$ –ускорение;

$\overline{F}$ –сила, приложенная к точке.

Так как $\bar{a} = \dfrac{d\bar{\upsilon}}{dt}$, то основной закон динамики можно записать следующим образом:

$$m \cdot \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \bar{F},$$

где υ – скорость;

t – время.

Второй закон Ньютона называют основным законом динамики, а равенство, выражающее его, – основным уравнением динамики точки.

Как уже говорилось, масса материальной точки в классической механике есть постоянная скалярная величина, являющаяся мерой инертности точки. Основное уравнение динамики точки показывает, что чем больше масса точки, тем меньшее ускорение сообщает ей прилагаемая сила, и, наоборот, чем меньше масса точки, тем большее ускорение она получает при действии силы. Это говорит о том, что масса точки действительно отображает инертные ее свойства, проявляющиеся во взаимодействии с окружающими телами. Масса является одной из основных динамических характеристик точки.

Как известно, на свободную точку, падающую с небольшой высоты, действует в данной точке Земли сила тяжести P, равная весу точки и сообщающая ей постоянное ускорение g. Подставив в скалярное равенство $ma = F$ вместо F силу P, а вместо a – ускорение g, получим $mg = P$. Отсюда

$$m = \frac{P}{g},$$

т. е. масса материальной точки m равна отношению ее веса к ускорению свободного падения.

Если решается задача о движении твердого тела или механической системы вообще, то под массой тела или системы понимают сумму масс всех материальных точек, входящих в них, т. е.

$$M = \Sigma m_s$$

где M – масса всего тела или системы;

m_s – масса точки s.

Так как вес системы тел M равен сумме весов материальных точек, составляющих их, то для M получим формулу, аналогичную m:

$$M = \frac{P}{g},$$

где через P обозначен вес тела или вес механической системы, т. е. масса твердого тела или системы тел равна отношению их веса к ускорению свободного падения.

В системе СИ единицей длины является метр (м), единицей времени – секунда (с), единицей массы – ньютон (Н). 1 Н = 1 кг · 1 м/с^2.

10.1.3. Третий закон – закон равенства действия противодействию

Две материальные точки действуют друг на друга силами, равными по модулю и направленными по прямой, соединяющей эти точки, в разные стороны.

Как известно из статики, силы взаимодействия двух точек не всегда являются уравновешенной системой, так как они приложены к точкам, принадлежащим разным телам.

Этот закон описывает взаимодействие точек технической системы и применяется для изучения динамики системы.

10.1.4. Четвертый закон – закон независимости действия сил

Несколько сил, действующих на материальную точку, сообщают ей ускорение, которое она приобрела бы при действии одной силы, равной геометрической сумме действующих сил.

В случае действия на точку нескольких сил основное уравнение динамики точки записывается следующим образом:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F} = \sum \overline{F}_S.$$

Но при этом под $\overline{F}$ понимается равнодействующая всех сил, приложенных к точке.

При инерциальных системах отсчета *законы классической механики верны только для абсолютного движения свободной точки,* т. е. движения относительно неподвижной системы отсчета.

В классической механике система отсчета отождествляется с системой координат. В теории относительности под системой отсчета понимают декартову систему координат вместе с часами, находящимися в точках пространства, где производятся наблюдения.

Следует отметить, что в природе нет абсолютно неподвижных тел. Поэтому при решении задачи классической механики выбираются такие системы отсчета, в которых законы Ньютона были бы справедливы хотя бы и приближенно, но с необходимой степенью точности. Такие системы отсчета и называются *инерциальными*. В классической механике постулируется существование хотя бы одной инерциальной системы отсчета. Г. Галилей показал, что *все системы отсчета, движущиеся относительно какой-нибудь инерциальной системы прямолинейно и равномерно, являются также инерциальными*.

Точность решения большой части задач динамики вполне удовлетворительна, если за систему отсчета принять систему осей, связанных с Землей.

Необходимо отметить, что законы классической механики справедливы лишь для свободных точек. Однако несвободные точки можно представить свободными при помощи принципа *освобождаемости*: *не нарушая покоя или движения точек, можно отбросить наложенные на них связи и заменить их действие введением соответствующих реакций*. Этот принцип принимается в качестве постулата.

На основании принципа освобождаемости основное уравнение динамики для несвободной точки принимает следующий вид:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F} = \Sigma \overline{F}_{\text{ак}} + \Sigma \overline{F}_{\text{р}},$$

где $\overline{F}$ – равнодействующая всех активных сил $\overline{F}_{\text{ак}}$ и реакций $\overline{F}_{\text{р}}$, приложенных к движущейся точке.

При рассмотрении вопроса о силах, под действием которых происходит движение точки и системы, прежде всего нужно отметить, что *силы*, изучаемые в динамике, могут быть как *постоянными* (сила тяжести, сила кулонова, сила трения и т. п.), так и *переменными*.

Переменные силы могут изменяться в зависимости от времени (например, сила тяги трамвая при включении или выключении реостата), скорости движущейся точки (например, сопротивление воздуха, воды), положения точки относительно выбранной системы отсчета (например, сила всемирного тяготения). Переменными могут быть как активные силы, так и реакции связей (например, реакция пружины, к концу которой привязан груз).

10.2. Решение первой основной задачи динамики точки

В динамике решаются две основные задачи [1, 4]:

1) определение силы, производящей движение, по заданному движению точки или системы;

2) определение движения объектов по заданным силам, действующим на точку или систему.

Особо следует отметить то, что когда говорят, что задано движение точки, то предполагается, что движение задано одним из кинематических способов (векторным, координатным или естественным). Когда определяют движение точки по заданным силам, то стремятся выразить движение точки одним из кинематических способов, т. е. ищут координаты точки как функции времени, или закон движения точки по траектории и т. д.

Решим первую основную задачу динамики точки.

Пусть движение точки массой m задано координатным способом, т. е. заданы $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Дифференцируя дважды по t и подставляя значения $m, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ в уравнение, найдем проекции равнодействующей силы на оси координат:

$$F_x = m\ddot{f}_1(t),\ F_y = m\ddot{f}_2(t),\ F_z = m\ddot{f}_3(t).$$

Модуль и направляющие конусы равнодействующей найдем по следующим известным формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,,$$

$$\cos(\bar{F}, \bar{i}\,) = \frac{F_x}{F},\quad \cos(\bar{F}, \bar{j}\,) = \frac{F_y}{F},\quad \cos(\bar{F}, \bar{k}\,) = \frac{F_z}{F}.$$

Если движение задано естественным способом, т. е. заданы траектория, начало отсчета и направление положительного отсчета дуговой координаты и закон движения по траектории $S = f(t)$, то равнодействующую силу найдем при помощи следующих геометрических соотношений:

$$V_\tau = \dot{S},\ a_\tau = \ddot{S},\ a_n = \frac{\dot{S}^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории точки;

V_τ – скорость точки.

После подстановки найденных значений в уравнения определим проекции равнодействующей на главную нормаль и касательную. Модуль и направление равнодействующей найдем по формулам

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m\sqrt{\ddot{S}^2 + \left(\frac{\dot{S}^2}{\rho}\right)^2},$$

$$\cos(\overline{F}^\wedge, \overline{r}) = \cos\alpha = \frac{F_\tau}{F} = \frac{\ddot{S}}{\sqrt{\ddot{S}^2 + \left(\frac{\dot{S}^2}{\rho}\right)^2}},$$

где α – угол, образованный равнодействующей с положительным направлением касательной к траектории точки.

10.3. Решение второй основной задачи динамики

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки. Пусть на точку с массой m действует система сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\}$. Основное уравнение динамики точки будет иметь следующий вид:

$$m\overline{a} = \overline{F},$$

где $\overline{F}$ – равнодействующая всех активных сил и реакций связей.

Спроецируем обе части этого векторного равенства на оси декартовых координат:

$$ma_x = F_x,\ ma_y = F_y,\ ma_z = F_z.$$

Выразив проекции ускорения a_x, a_y, a_z соответственно через $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, получим

$$m\ddot{x} = F_x,\ \ m\ddot{y} = F_y,\ \ \ m\ddot{z} = F_z.$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых координатах*.

Если точка движения находится в плоскости, то, взяв координатные оси Ox и Oy в плоскости движения точки, получим

$$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y.$$

Если точка совершает прямолинейное движение, то, приняв прямую, по которой движется точка, за ось *Ox*, получим

$$m\ddot{x} = F_x.$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением прямолинейного движения материальной точки*.

При решении задач часто пользуются и естественной системой координат. Для получения дифференциальных уравнений в проекциях на оси естественной системы спроецируем обе части основного уравнения динамики точки на касательную, главную нормаль и бинормаль:

$$ma_\tau = F_\tau,\ ma_n = F_n,\ ma_b = F_b.$$

Проекция ускорения на бинормаль равна нулю, а проекции на касательную и главную нормаль равны:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt},\ \text{и}\ a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

следовательно,

$$m\frac{dV_\tau}{dt} = F_\tau,\ m\frac{V^2}{\rho} = F_n,\ 0 = F_b.$$

В этих уравнениях F_τ, F_n и F_b – это проекции равнодействующей всех сил, приложенных к точке, на касательную, главную нормаль и бинормаль.

Пусть на точку массой m действуют силы. Нужно найти движение точки, т. е. определить координаты точки как функции времени.

Вторая задача динамики, как и первая, решается с помощью дифференциальных уравнений движения точки.

Как уже говорилось, силы, действующие на точку, могут быть постоянными и переменными. В общем случае их равнодействующая $\overline{F}$ будет зависеть от времени, координат точки и ее скорости. Поэтому проекции равнодействующей на оси координат будут функциями $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, а уравнения примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \\ m\ddot{y} &= F_y\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \\ m\ddot{z} &= F_z\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \end{aligned}\right\}.$$

Для нахождения кинематических уравнений движения точки нужно проинтегрировать эту систему трех совместных дифференциальных уравнений второго порядка.

Если решается задача о движении точки в плоскости, то нужно проинтегрировать систему двух дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \\ m\ddot{y} &= F_y\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \end{aligned}\right\}.$$

В случае прямолинейного движения точки решение задачи сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения второго порядка:

$$m\ddot{x} = F_x\left(t, x, \dot{x}\right).$$

Как известно из математики, общее решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две постоянные интегрирования (произвольные постоянные).

После интегрирования системы трех дифференциальных уравнений второго порядка получим общее решение, содержащее шесть произвольных постоянных в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \\ y &= f_2\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \\ z &= f_3\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \end{aligned}\right\}.$$

В случае движения точки в плоскости *Oxy* получим x и y в виде функций от t и четырех произвольных постоянных:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4\right) \\ y &= \varphi_2\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4\right) \end{aligned}\right\}.$$

В случае прямолинейного движения вдоль оси *Ox* получим

$$x = f(t,\ C_1,\ C_2).$$

Выписанные соотношения являются общими интегралами уравнений.

Таким образом, получено бесконечное множество решений, т. е. семейство траекторий, зависящее от шести параметров при движении точки в пространстве (четырех – при движении в плоскости, от двух – при движении по прямой).

Чтобы выбрать из семейства одну определенную траекторию, следует придать параметрам $C_1 - C_6$ конкретные значения. Вычисляют эти параметры с помощью так называемых начальных условий.

Обычно задаются в некоторый момент времени положение и скорость точки: так, при $t = t_0$ (t_0 часто берут равным нулю) задаются начальные координаты x_0, y_0, z_0 и проекции начальной скорости на оси координат, т. е. $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Пользуясь начальными условиями, можно найти все постоянные интегрирования, затем, подставляя их в общие интегралы, можно определить движение точки, соответствующее данным начальным условиям.

Если решается задача о движении точки в плоскости Oxy, то произвольных постоянных интегрирования будет четыре и для определения их задаются начальные условия в виде $t = t_0, x = x_0, y = y_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0$.

При прямолинейном движении точки для определения постоянных C_1 и C_2 задаются начальные условия в виде $t = t_0, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$.

Приложенные к точке силы и начальные условия полностью определяют ее движение.

Задача интегрирования системы дифференциальных уравнений является в общем случае очень трудной. Точное решение ее возможно лишь в простейших случаях, когда силы, действующие на точку, сравнительно просто зависят только от времени, или от скорости, или от координат точки.

Опишем порядок решения второй задачи динамики точки.

1. Выбрать систему отсчета (начало координат удобно брать в начальном положении точки – в момент $t = t_0$).

2. Изобразить на чертеже движущуюся точку в произвольный момент.

3. Изобразить силы, действующие на точку (активные и реакции), обозначив их буквами и показав в виде векторов, приложенных к точке.

4. Составить дифференциальные уравнения движения точки.

5. Записать начальные условия движения.

6. Проинтегрировать дифференциальные уравнения. По начальным условиям определить постоянные интегрирования.

7. При решении в общем виде произвести проверку ответа на размерность.

8. Найти требуемые величины, произвести исследование решения.

10.4. Механическая система. Силы внешние и внутренние.

Классификация сил. При изучении движения системы все силы, действующие на точки системы, удобно делить *на внешние и внутренние. Внешними силами* называются силы, с которыми действуют на точки данной системы тела, не принадлежащие системе. *Внутренними силами* именуются силы взаимодействия точек данной системы. Разделение сил на внешние и внутренние является условным, оно зависит от того, какие тела включены в данную систему. Таким образом, *чтобы сделать заключение о внешних и внутренних силах в каждой задаче, нужно определить данную систему, т. е. указать, какие тела в нее входят.* Одна и та же сила может быть внешней или внутренней в зависимости от того, какие тела включены в данную систему. Следует отметить, что силы, действующие между точками, не входящими в состав рассматриваемой системы, не относятся ни к внешним ни к внутренним.

Для внешних сил принято обозначение «*e*» (лат. *externus* – внешний), а для внутренних – «*i*» (лат. *internus* – внутренний). Данные обозначения следует заключать в скобки (например, $F^{(e)}$, $F^{(i)}$).

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1) главный вектор внутренних сил равен нулю;

2) главные моменты внутренних сил относительно любой оси и любой точки равны нулю.

Эти свойства вытекают из *третьего закона Ньютона: внутренние силы – силы взаимодействия точек системы попарно равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны.*

Следовательно, их геометрическая сумма, т. е. главный вектор и сумма моментов относительно любого центра или оси равны нулю.

Если решается задача о движении одной точки, то все силы, действующие на нее, являются внешними.

Итак, в динамике все силы делятся на активные силы и реакции, и на внешние и внутренние силы. Внешние силы могут быть активными и реакциями.

Дифференциальные уравнения движения механической системы являются совокупностью дифференциальных уравнений движения отдельных точек системы, находящихся под воздействием как внешних, так и внутренних сил.

Основное уравнение динамики для S-й точки системы будет иметь следующий вид [4]:

$$m_S \overline{a}_S = \overline{F}_S^{(e)} + \overline{F}_S^{(i)},$$

где $\overline{F}_S^{(e)}$ и $\overline{F}_S^{(i)}$ – равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на взятую точку.

Если система состоит из n точек, то количество дифференциальных уравнений движения системы в векторной форме будет n:

$$m_S \overline{a}_S = \overline{F}_S^{(e)} + \overline{F}_S^{(i)} \quad (S = 1, 2, \dots, n).$$

Проецируя это равенство на декартовы оси координат, получим $3n$ дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m_S \ddot{x}_S &= F_{Sx}^{(e)} + F_{Sx}^{(i)} \\ m_S \ddot{y}_S &= F_{Sy}^{(e)} + F_{Sy}^{(i)} \\ m_S \ddot{z}_S &= F_{Sz}^{(e)} + F_{Sz}^{(i)} \end{aligned}\right\} (S = 1, 2, \dots, n).$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения механической системы в декартовых координатах*.

Дифференциальные уравнения движения точки и системы являются исходными при решении задач динамики.

10.5. Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции. Центр масс

Моментом инерции тела (системы) относительно оси называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты расстояний до этой оси:

$$J_z = \Sigma m_k h_k^2,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси;

m_k – точка тела;

h_k – расстояние от оси до точки.

Осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Единица измерения момента инерции в СИ – 1 кг · м^2.

Радиусом инерции тела относительно оси называется линейная величина ρ_z, определяемая равенством

$$J_z = M\rho_z^{\,2},$$

где M – масса тела;

ρ_z – радиус инерции тела.

Например, следует понимать, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси до той точки, где надо сосредоточить всю массу тела.

Для однородного цилиндра радиусом R и массой M осевой момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, будет равен

$$J_C = MR^2 / 2.$$

Геометрическая точка C, координаты которой r_C определяются формулой $\overline{r}_C = \dfrac{1}{M}\sum m_k \overline{r}_k$, называется *центром масс* или центром инерции механической системы.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Каковы основные задачи динамики?
2. Объясните суть дифференциальных уравнений движения материальной точки.
3. Опишите решение первой и второй задач динамики точки.
4. Дайте определения механической системы.
5. Что такое центр масс системы?

Контрольная задача

Данная задача относится ко второй задаче динамики точки: по известным (заданным) силам и начальным условиям движения требуется определить уравнение движения точки [2]. Для этого следует изобразить движущееся тело (точку) в произвольный момент времени, показать все действующие на тело (заданные) силы, освободиться от связей, заменив их действие соответствующими реакциями. Затем составить дифференциальные уравнения движения (два при криволинейном и одно при прямолинейном движениях) и проинтегрировать их. Значения постоянных интегрирования определить из начальных условий. Исходные данные для различных вариантов даны в таблице.

Таблица

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра			Значения 2-й цифры шифра			Значения 3-й цифры шифра		
	v_0, м/с	a, м	b, м	α, град	Силы, Н		Номер условия	Номер схемы (рис. 10.1)	f
					F	P			
1	21	4,5	1,0	30	2	30	1	1	–
2	22	5,0	1,5	45	4	35	1	2	–
3	23	5,5	2,0	60	6	40	1	3	–
4	24	6,0	2,5	30	8	45	1	4	–
5	25	6,5	3,0	45	10	50	2	5	–
6	26	7,0	3,5	60	12	55	2	6	–
7	27	7,5	4,0	30	14	60	3	7	0,10
8	28	8,0	4,5	45	16	65	3	8	0,12
9	29	8,5	5,0	60	18	70	4	9	0,14
0	30	9,0	5,5	30	20	75	4	10	0,16

Условия

1. Тяжелая материальная точка M брошена под углом α к горизонту со скоростью v_0. В начальный момент времени точка находилась в положении M_0. Пренебрегая сопротивлением среды, определить уравнения движения точки в заданной системе координат (рис. 10.1, схемы 1–4).

2. Тело M весом P брошено вертикально вверх (см. рис. 10.1, схема 5) или вниз (см. рис. 10.1, схема 6) со скоростью v_0. При движении на тело действует сила ветра F. В начальный момент тело находилось в положении M_0. Определить уравнение движения, приняв его за материальную точку, в заданной системе координат (см. рис. 10.1, схемы 5, 6).

3. Груз весом P движется прямолинейно по горизонтальной плоскости. На груз действует сила F, составляющая с горизонталью угол α. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f. В начальный момент времени груз находился в положении M_0 на расстоянии a от начала

координат и имел скорость v_0. Определить уравнение движения груза в заданной системе координат (см. рис. 10.1, схемы 7, 8).

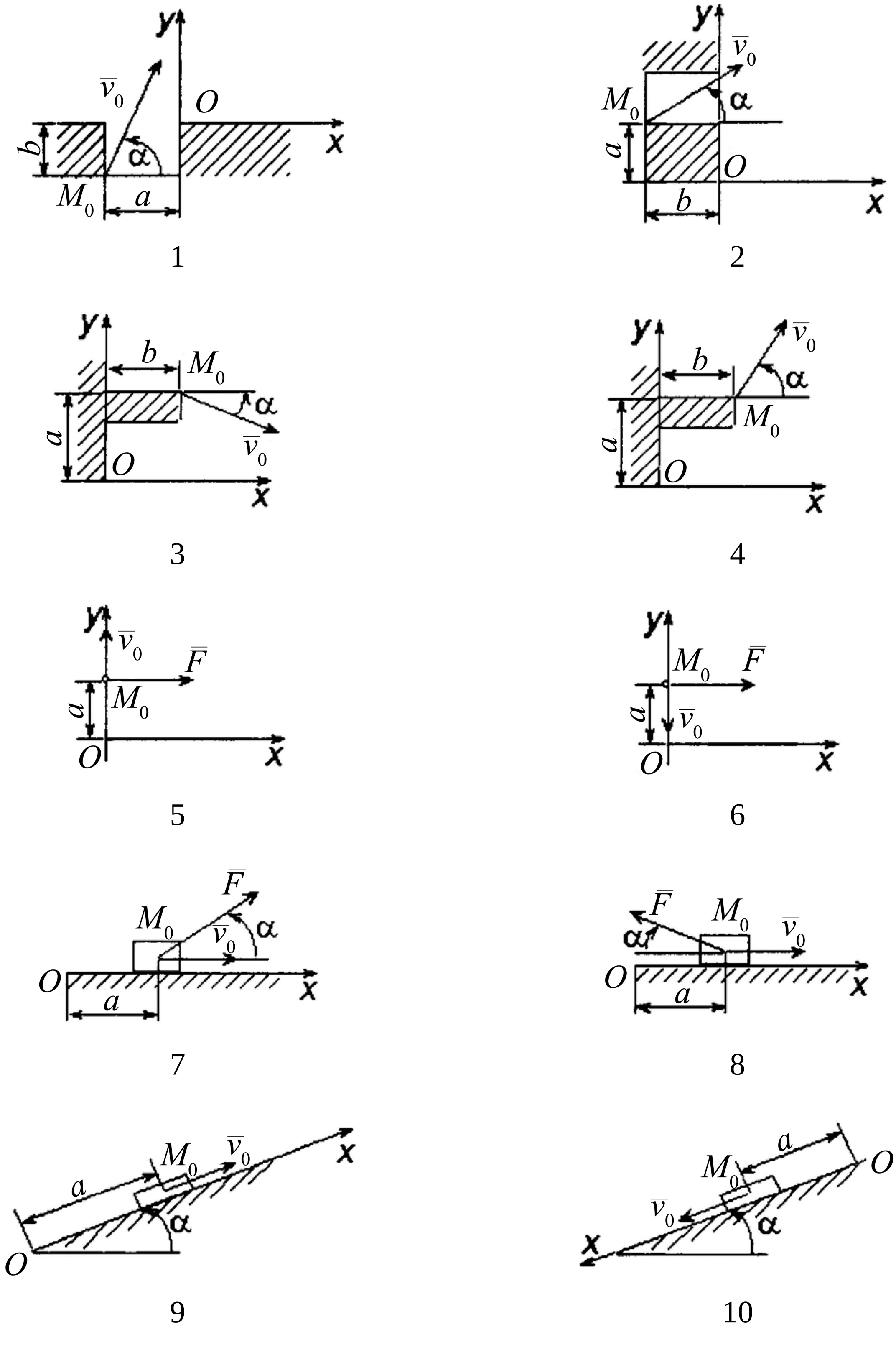


Рис. 10.1. Схемы к задаче

4. Груз весом P движется вверх (см. рис. 10.1, схема 9) или вниз (см. рис. 10.1, схема 10) по шероховатой наклонной плоскости. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f. В начальный момент груз находился в положении M_0 на расстоянии a от начала координат и имел скорость v_0. Определить уравнение движения груза в заданной системе координат (см. рис. 10.1, схемы 9, 10).

Примечание. Для схем 8 и 9 определить уравнение движения груза на первом этапе, когда движение происходит в направлении начальной скорости.

Пример решения

Условие. Груз весом P движется вниз по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол с горизонтом $\alpha = 30°$. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость $a = 0{,}16$. В начальный момент груз находился в положении M_0 на расстоянии $a = 9$ м от начала координат и имел скорость $\nu_0 = 30$ м/с. Определить уравнение движения груза в заданной системе координат (рис. 10.2).

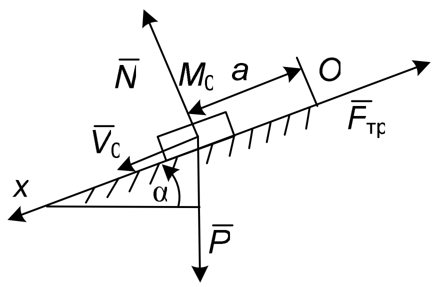


Рис. 10.2. Схема решения задачи

Решение. 1. Пусть тело в произвольный момент времени t занимает положение M на наклонной плоскости. Освободим тело от связи (шероховатой наклонной плоскости), заменив ее действие нормальной составляющей реакции N и силой трения $F_{тр}$. Тогда тело будет двигаться под действием системы трех сил (P, N, $F_{тр}$).

2. Примем тело за материальную точку. Проектируя основное уравнение динамики точки $m\bar{a} = \sum_{s=1}^{n} \bar{F}_s$ на оси декартовых координат Ox и Oy (ось Ox совпадает с направлением движения точки), получим два дифференциальных уравнения:

$$m\ddot{x} = \sum F_{sx} = P\sin\alpha - F_{тр}, \tag{10.1}$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{sy} = N - P\cos\alpha, \tag{10.2}$$

где m – масса точки;

$\ddot{x}$, $\ddot{y}$ – проекции ускорения точки на соответствующие оси.

Так как тело движется прямолинейно вдоль оси Ox, то проекция ускорения на ось Oy равна нулю, следовательно, уравнение (10.2) примет вид $N = P\cos\alpha$.

Сила трения по закону Кулона равна $F_{тр} = fN = fP\cos\alpha$. С учетом этого выражения дифференциальное уравнение (10.1) примет следующий вид:

$$m\ddot{x} = P\sin\alpha - fP\cos\alpha.$$

После замены $P = mg$, где g – ускорение свободного падения тела, получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Для понижения порядка уравнения произведем замену $\ddot{x} = \dfrac{dv_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv_x}{dt} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Разделив переменные, проинтегрируем дифференциальное уравнение с учетом начальных условий (при $t = 0$, $v_x = v_0$):

$$\int_{v_0}^{v_x} dv_x = \int_0^t g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)dt,$$

$$v_x = v_0 + g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)t.$$

Произведем замену для понижения порядка уравнения $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ и, разделив переменные, проинтегрируем дифференциальное уравнение второй раз с учетом начальных условий (при $t = 0$; $x = x_0 = a$):

$$\int_a^x dx = \int_0^t \left[v_0 + g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)\right]tdt,$$

$$x = a + v_0 t + g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)\frac{t^2}{2}. \qquad (10.3)$$

Подставив в соотношение (10.3) значения заданных величин, получим окончательное уравнение движения груза:

$$x = 9 + 9{,}81\cdot\left(\sin 30^\circ - 0{,}16\cdot\cos 30^\circ\right)\cdot\frac{t^2}{2} = 9 + 30t + 1{,}77\cdot t^2.$$

Глава 11. Общие теоремы динамики точки и системы

Решение второй основной задачи динамики в общем случае невозможно. Поэтому возникает вопрос о других путях исследования движения точки и особенно системы.

Одним из путей решения этой проблемы является применение общих теорем динамики, которые не дают полного представления о движении каждой точки механической системы, но позволяют описать движение системы в целом.

Общие теоремы динамики связывают меры механического движения материальной точки или системы с силами, вызывающими изменение этих мер. Меры механического движения: количество движения $m\overline{V}$; кинетическая энергия $m\frac{V^2}{2}$; момент количества движения относительно оси K_z.

В соответствии с этими мерами существуют три общие теоремы динамики для точки и три общие теоремы динамики для системы.

11.1. Теорема об изменении количества движения точки и системы

Количеством движения точки называется векторная мера механического движения q, равная произведению массы материальной точки m на ее скорость $\overline{V}$ [4]: $\overline{q} = m\overline{V}$. *Количество движения* системы равно геометрической сумме количеств движения всех точек: $\overline{Q} = \sum \overline{q}_S = \sum m_S \overline{V}_S$. Единица измерения количества движения – кг · м/с.

Теорема для точки в дифференциальной форме: производная по времени dt *от количества движения точки* dq *равна равнодействующим всех сил* $\overline{F}$, *приложенным к точке* $\overline{F}_s$, *т. е.*

$$\frac{d\overline{q}}{dt} = \overline{F} = \sum \overline{F}_S.$$

В *интегральной форме* данная теорема будет иметь следующий вид:

$$m\overline{V} - m\overline{V}_0 = \sum \int_{t_0}^{t} \overline{F}_S dt.$$

Величина $S = \sum \int\limits_{t_0}^{t} \bar{F}_S dt$ называется импульсом силы $\bar{F}_S$ за конечный промежуток времени. При решении задач пользуются не векторными выражениями, а уравнениями в проекциях на оси координат.

Теорема для системы: производная от количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\sum \bar{q}_k}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}; \text{ или } \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)} = \bar{F}_{\text{гл}}^{(e)}.$$

Уравнение теоремы для системы в интегральной форме:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^{(e)}.$$

11.2. Теорема об изменении момента количества движения точки и системы

Моментом количества движения (кинетическим моментом) k_z материальной точки относительно оси называется скалярная величина, равная моменту от проекции вектора количества движения точки на плоскость q_{xy}, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью (рис. 11.1) [4]:

$$k_z = \pm q_{xy} h,$$

где h – кратчайшее расстояние от проекции q_{xy} до оси вращения.

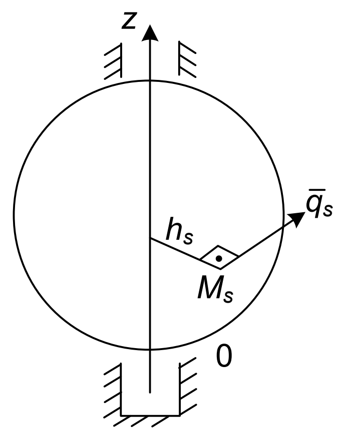


Рис. 11.1. Схема к определению количества движения

Правило знаков (положительного или отрицательного значения) действует аналогично правилу знаков для момента силы относительно оси.

Главным моментом количества движения K_z (главным кинетическим моментом) системы относительно оси называется скалярная величина, равная сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно той же оси, т. е.

$$K_z = \sum k_{z_i}.$$

Найдем кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω (см. рис. 11.1), для точки M_S:

$$k_{z_S} = q_S h_S,$$

где $q_S = m_S V_S$, но $V_S = \omega h_S$, поэтому $k_{z_S} = m_S h_S^2$.

Тогда кинетический момент твердого тела будет равен

$$K_z = \sum k_{z_S} = \sum m_S h_S^2 \omega = \omega \sum m_S h_S^2.$$

Величина $\sum m_S h_S^2 = J_z$ называется моментом инерции тела относительно оси z.

Момент инерции твердого тела относительно оси является характеристикой меры инертности тела при вращательном движении вокруг этой оси [1, 4].

Кинетический момент твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции относительно этой оси на угловую скорость тела

$$K_z = J_z \omega.$$

Теорема для точки: производная по времени от кинетического момента точки относительно неподвижной оси равна сумме моментов всех сил, приложенных к точке, относительно той же оси [4]:

$$\frac{dk_z}{dt} = \sum M_z\left(\overline{F}_S\right).$$

Теорема для системы: производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной оси равна главному моменту внешних сил относительно той же оси.

Доказательство: пусть на некоторую точку системы действуют внешние и внутренние силы. Обозначим равнодействующую внешних сил через $\overline{F}_S^{(e)}$, а равнодействующую внутренних сил – через $\overline{F}_S^{(i)}$.

На основании теоремы для точки

$$\frac{dk_{z_S}}{dt} = \sum M_S\left(\bar{F}_S\right) = M_z\left(\bar{F}_S^{(e)}\right) + M_z\left(\bar{F}_z^{(i)}\right).$$

Просуммируем для всех точек системы:

$$\frac{dK_{z_S}}{dt} = \sum M_z\left(\bar{F}_S^{(e)}\right) + \sum M_z\left(\bar{F}_z^{(i)}\right).$$

Но $\sum M_z\left(\bar{F}_z^{(i)}\right) = 0$, тогда

$$\frac{dK_{z_S}}{dt} = \sum M_z\left(\bar{F}_S^{(b)}\right) = M_{\Gamma_z}^{(e)}.$$

Приведем *дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси*. Пусть твердое тело вращается вокруг оси z под действием системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$. Освободим тело от связей, заменив их реакциями $\bar{N}_0, \bar{N}_A$.

Для твердого тела, вращающегося вокруг оси z $K_z = J_z\omega$, так как реакции $\bar{N}_0, \bar{N}_A$ пересекают ось z, то их момент относительно этой оси равен нулю.

Главный момент внешних сил, приложенных к телу, относительно оси вращения принято называть вращающим моментом.

Обозначим его через $M_z^{\text{вр}}$, тогда

$$M_{\Gamma z}^{(e)} = M_z^{\text{вр}} = \sum M_z\left(\bar{F}_S^{(e)}\right).$$

На основании того, что $\dfrac{d\left(J_z\omega\right)}{dt} = M_z^{\text{вр}}$ или $\dfrac{J_z d\omega}{dt} = M_z^{\text{вр}}$.

Но при этом $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \ddot{\varphi}$.

Следовательно, дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси будет выглядеть следующим образом:

$$J_z\ddot{\varphi} = M_z^{\text{вр}}.$$

Приведем частные случаи данного уравнения:

1) если $M_z^{\text{вр}} = 0$, то $\ddot{\varphi} = \ddot{0} = \varepsilon$, $\omega = 0$;

2) если $M_z^{\text{вр}} > 0$, то $\varepsilon > 0$, то будет иметь место ускоренное вращение;

3) если $M_z^{\text{вр}} < 0$, то $\varepsilon < 0$, то будет иметь место замедленное вращение.

Следовательно, чем больше J_z при одном и том же моменте, тем меньше ε и наоборот, т. е. момент инерции тела относительно оси является мерой инертности тела при вращении вокруг этой оси.

11.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы

Кинетической энергией материальной точки T называют половину произведения массы точки на квадрат ее скорости [4], т. е.

$$T = \frac{mV^2}{2},$$

где m – масса твердого тела;

V – общая скорость для всех точек тела.

Кинетической энергией системы T называют сумму кинетических энергий всех точек механической системы, т. е.

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Систему материальных точек или тел, движение которой рассматривается, принято называть *механической системой*.

При поступательном движении твердого тела T равна

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси T будет равняться

$$T = J_z \frac{\omega^2}{2}.$$

При плоском движении твердого тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела вместе с центром масс и кинетической энергии от вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярную плоскости движения:

$$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вращ}}, \text{ т. е.}$$

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2},$$

где I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела C и перпендикулярной плоскости движения тела.

Введем понятие *работы силы*. Элементарная работа силы δA равна скалярному произведению силы $\bar{F}$ на дифференциал радиус-вектора точки приложения силы $\overline{dr}$

$$\delta A = \bar{F}\,\overline{dr}.$$

Аналитическое выражение элементарной работы:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении точки:

$$A = FS \cos\varphi.$$

Приведем некоторые случаи вычисления работы:

- работа сил тяжести, действующих на систему:

$$A = \pm Ph,$$

где P – вес системы;

h – высота подъема;

- работа сил, приложенных к вращающемуся телу:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi,$$

где M_z – момент силы относительно оси вращения;

$d\varphi$ – элементарный угол поворота.

Теорема об изменении кинетической энергии точки и ее системы [4].

В интегральной форме: изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил

$$T - T_0 = \sum A_K^{(e)} + \sum A_K^{(i)},$$

где A_K – точка системы.

В дифференциальной форме: *дифференциал от кинетической энергии системы dT равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующий на систему*

$$dT = \sum \partial A_K^{(e)} + \sum \partial A_K^{(i)}.$$

Если система состоит из твердых тел, соединенных между собой шарнирами без трения (нерастяжимыми идеально гибкими нитями), то работа внутренних сил таких шарниров и нитей равна нулю, т. е.

$$T - T_0 = A_K^{(e)}.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое импульс силы? Дайте определение теоремы об изменении количества движения.
2. Дайте определения моменту инерции тела и моменту количества движения точки и системы.
3. Дайте определение теоремы об изменении момента количества движения системы.
4. Дайте определение работы силы и кинетической энергии.
5. Дайте определение кинетической энергии при различных случаях движения.
6. Дайте определение теоремы об изменении кинетической энергии системы.

Контрольная задача 11.1

Задача на применение теоремы об изменении количества движения к определению скорости материальной точки.

Условие

Телу массой m сообщена начальная скорость v_0, направленная вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. На тело действует сила P, направленная в ту же сторону (рис. 11.2).

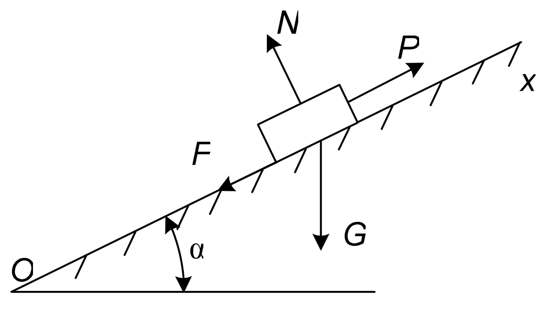


Рис. 11.2. Схема решения задачи 11.1

Опираясь на закон изменения силы $P = P(t)$ и коэффициент трения скольжения f, определить скорость тела в момент времени t_1, t_2, t_3 и проверить полученный результат для момента времени t_1 с помощью дифференциального уравнения движения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра					Значения 2-й цифры шифра			Значения 3-й цифры шифра		
	m, кг	v_0, м/с	t_1, с	t_2, с	t_3, с	P_0, Н	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	α, град	f
1	35	5,4	4	10	16	100	200	150	250	25	0,10
2	20	3,0	6	10	15	200	100	160	180	37	0,25
3	25	4,0	4	10	16	200	200	120	200	21	0,10
4	10	4,5	5	10	16	140	180	140	100	32	0,12
5	16	9,0	4	8	16	120	120	120	160	24	0,08
6	40	4,0	4	9	12	400	300	300	140	40	0,06
7	20	8,0	5	8	11	300	300	150	180	25	0,20
8	16	7,6	6	11	13	275	200	160	120	23	0,12
9	12	5,0	6	10	14	100	140	120	110	20	0,20
0	50	12,0	2	6	12	150	300	200	200	27	0,08

При построении графика изменения силы P по заданным ее значениям P_0, P_1, P_2, P_3 для момента времени t_0, t_1, t_2, t_3 считать зависимость $P = P(t)$ между указанными моментами времени линейной.

Пример решения

Условие: $m = 40$ кг, $v_0 = 10$ м/с, $t_2 = 8$ с, $P_0 = 0$, $t_3 = 12$ с, $P_1 = 250$ Н, $P_2 = 300$ Н, $P = 200$ Н, $\alpha = 30°$, $f = 0{,}1$.

Определить v_1, v_2, v_3 и t_1, t_2, t_3.

Решение. Покажем силы, действующие на тело (см. рис. 11.2): вес $\bar{G}$, нормальную реакцию плоскости $\bar{N}$, силу $\bar{P}$ и силу трения скольжения $\bar{F}$, направив ее противоположно начальной скорости, т. е. вниз по наклонной плоскости.

Построим график $P = P(t)$ по заданным значениям P_0, P_1, P_2, P_3 (рис. 11.3).

Для тела, принимаемого за материальную точку, составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения в проекциях на ось x для промежутка времени от 0 до t:

$$mv_{1x} – mv_{ox} = \Sigma S_{ix},$$

где $\Sigma S_{ix} = Gt_1\sin\alpha – Ft_1 + S_{px}$.

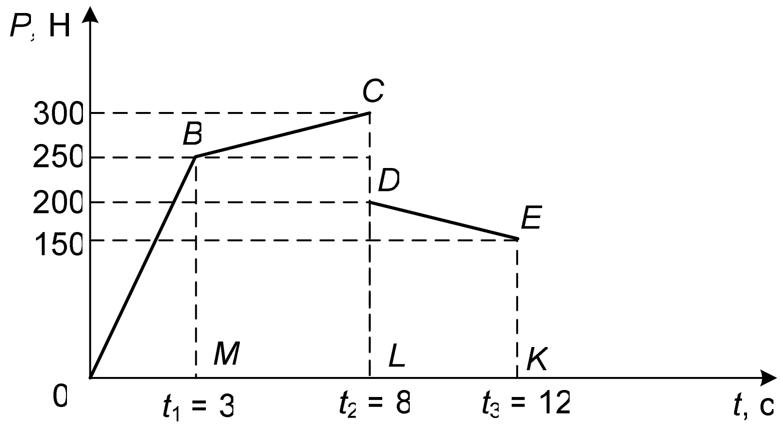


Рис. 11.3. График изменения силы P

Проекция импульса переменной силы P за t_1, с:

$$S_{px} = \int_0^{t_1} P dt.$$

Этот интеграл определяется как площадь треугольника OBM на графике $P = P(t)$ следующим образом:

$$S_{px} = (3 \cdot 250) / 2 = 375 \text{ Н}.$$

Учитывая, что сила трения скольжения $F = fN = fG\cos\alpha$, получаем уравнение в следующем виде:

$$mv_{1x} – mv_{0x} = –gt_1\sin\alpha – fg\cos\alpha\, t_1 + 375,$$

откуда

$$v_{1x} = v_{0x} – gt_1\sin\alpha – fg\cos\alpha \cdot t_1 + 375 / m,$$

т. е. $v_{1x} = 10–9{,}81\cdot3\cdot0{,}5–0{,}1\cdot9{,}81\cdot0{,}87\cdot3+375/m = 10–14{,}72–2{,}76+9{,}38 = 2{,}10$ м/с.

Таким образом, $v_1 = v_{1x} = 2{,}10$ м/с.

Для определения скорости тела в момент времени t_2 составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для промежутка времени $t_2 – t_1$:

$$mv_{2x} – mv_{1x} = \Sigma S_{ix},$$

где $\Sigma S_{ix} = –G(t_2 – t_1)\sin\alpha – F(t_2 – t_1) + S_{px}$.

Проекция импульса переменной силы P за промежуток времени ($t_2 - t_1$, с) выражается площадью трапеции $MBCL\ S$ на графике $P = P(t)$:

$$S_{px} = -(5\ (250 + 300))\ /\ 2 = -1375\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Поэтому уравнение имеет следующий вид:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = -mg(t_2 - t_1)\sin\alpha - fmg\cos\alpha(t_2 - t_1) + 1375,$$

следовательно, v_{2x} будет равно

$$v_{2x} = v_{1x} - g(t_2 - t_1)\sin\alpha - fg\cos\alpha(t_2 - t_1) + 1375\ /\ m = 2{,}10 - 9{,}81 \times$$
$$\times\ 5 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}87 \cdot 5 + 1375\ /m = 2{,}10 - 24{,}52 + 4{,}27 + 34{,}38 = 7{,}68\ \text{м/с}.$$

Таким образом, $v_2 = v_{2x} = 7{,}68$ м/с.

Уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения и составленное для промежутка времени $t_3 - t_2$, дает возможность определить скорость тела v_3 в момент t_3:

$$mv_{3x} - mv_{2x} = \Sigma S_{ix},$$

где $\quad \Sigma S_{ix} = -G(t_3 - t_2)\sin\alpha - fG\cos\alpha(t_3 - t_2) + S_{px}$.

Проекция импульса переменной силы P за промежуток времени ($t_3 - t_2$, с) выражается площадью трапеции $LDEK$:

$$S_{px} = (4(200 + 150))\ /\ 2 = 700\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Тогда v_{3x} будет равняться

$$v_{3x} = v_{2x} - g(t_3 - t_2)\sin\alpha - fg\cos\alpha(t_3 - t_2) + 700/40 = 7{,}68 - 9{,}81 \cdot 4 \cdot 0{,}5 -$$
$$-\ 0{,}1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}87 \cdot 4 + 17{,}5 = 7{,}68 - 19{,}62 - 3{,}41 + 17{,}5 = 2{,}15\ \text{м/с}.$$

Таким образом, $v_3 = v_{3x} = 2{,}15$ м/с.

Контрольная задача 11.2

Задача на исследование вращательного движения твердого тела [2].

Условие

На звено 1 механизма, угловая скорость которого равна ω_{10}, с некоторого момента времени ($t = 0$) начинает действовать пара сил с моментом M (движущий момент) или движущая сила P.

Массы звеньев 1 и 2 механизма равны соответственно m_1 и m_2, а масса поднимаемого груза 3 – m_3. Момент сил сопротивления вращения ведомого звена 2 равен M_C. Радиусы больших и малых окружностей звеньев 1 и 2: R_1, r_1; R_2, r_2.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 11.2, схемы механизмов показаны на рис. 11.4.

Таблица 11.2

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра					Значения 2-й цифры шифра				Значения 3-й цифры шифра						Номер схемы (рис. 11.4)
	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_1, см	r_1, см	R_2, см	r_2, см	i_{x1}, см**	i_{x2}, см**	M_1, Нм	P_1, Н	M_c, Нм	w_{10}, $с^{-1}$	t_1, с	Звено*	
1	100	300	500	20	40	60	40	50	50	$2100 + 20t$	–	1000	2	2	1	1
2	300	80	500	70	50	40	30	60	–	$1800 + 40t$	t	600	0	0,5	2	2
3	200	100	400	60	30	30	20	60	$2\sqrt{2}$	t	$3000 + 100t$	800	0,5	2,5	1	3
4	100	250	300	20	60	50	30	50	40	–	$2700 + 200t$	1400	1,5	2	1	4
5	150	300	600	30	30	50	20	50	30	–	$5500 + 200t$	1500	2	1	2	5
6	400	250	600	70	20	30	20	70	$2\sqrt{2}$	$4800 + 10t$	–	800	3	4	1	6
7	300	200	400	60	40	30	20	50	20	–	$3000 + 100t$	500	0	3	2	7
8	300	250	700	50	30	40	20	40	30	–	$9700 + 50t$	500	1	2	1	8
9	200	100	500	80	60	40	20	50	–	$5900 + 30t$	–	600	2	3	2	9
0	250	100	400	40	20	30	20	30	–	–	$500 + 100t$	1200	0	1,5	2	10

* Звено, для которого нужно определить уравнение вращательного движения.

** Радиусы инерции i_{x1}, и i_{x2} заданы относительно осей вращения этих звеньев.

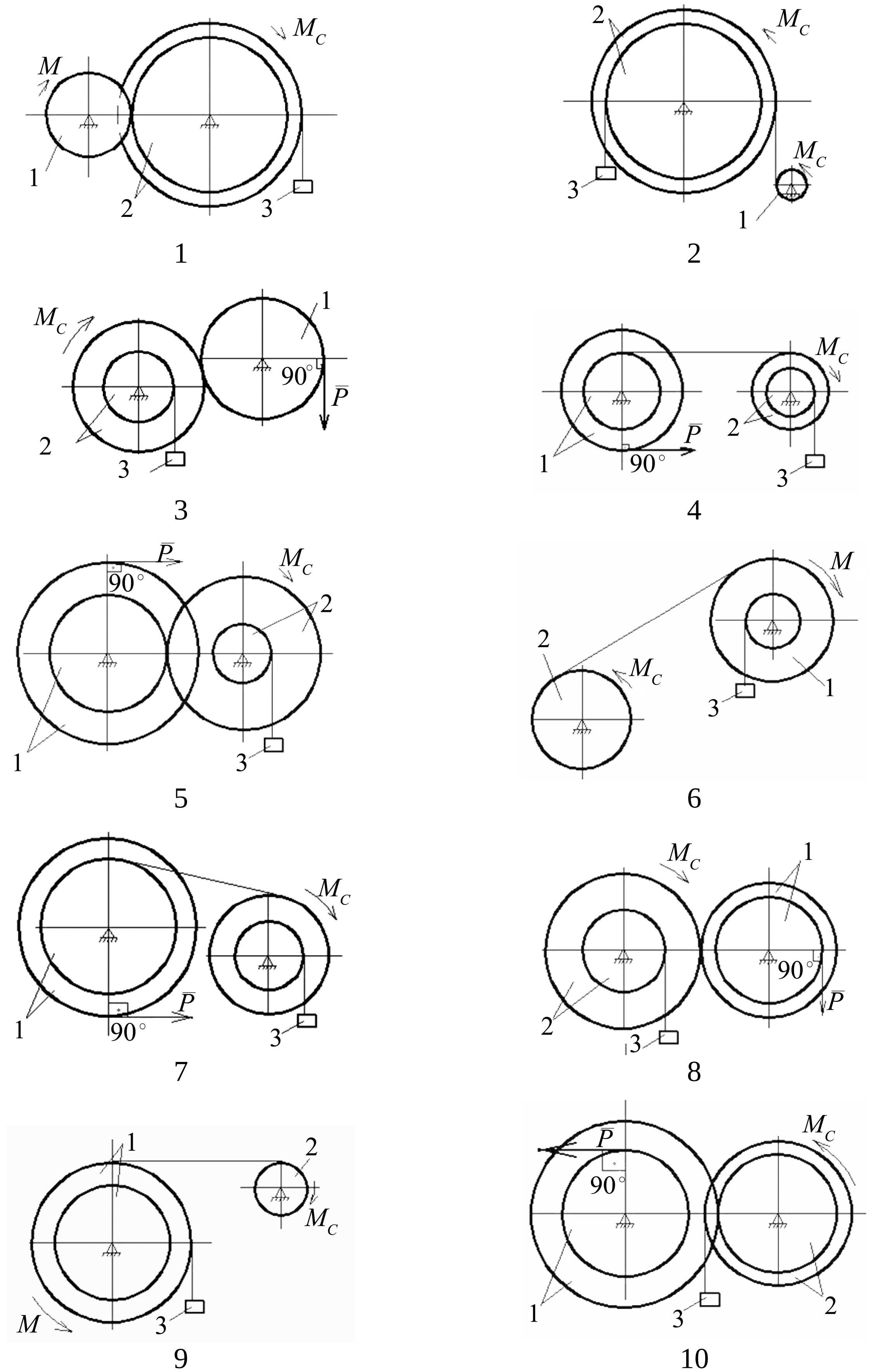


Рис. 11.4. Схемы к задаче 11.2

Найти уравнение вращательного движения звена механизма, указанного в последней графе табл. 11.2. Определить также натяжение нити в заданный момент времени, а в вариантах, где имеется соприкосновение звеньев 1 и 2, найти также окружное усилие в точке их касания. Звенья 1 и 2, для которых радиусы инерции i_{x1} и i_{x2} в табл. 11.2 не заданы, считать сплошными однородными дисками.

Пример решения

Условие. Пусть: $m_1 = 100$, $m_2 = 150$, $m_3 = 400$ кг, $M = 4200 + 200t$ Нм, $M_C = 2000$ Нм = const, $R_1 = 60$, $R_2 = 40$ см, $r_2 = 20$ см, $i_{x1} = 20\sqrt{2}$, $i_{xb} = 30$ см, $\omega_{10} = 2$ с$^{-1}$.

Найти уравнение $\varphi_2 = f(t)$ вращательного движения звена второго механизма, а также окружное усилие S в точке касания звеньев 1 и 2 и натяжение нити T в момент времени t_1 (рис. 11.5).

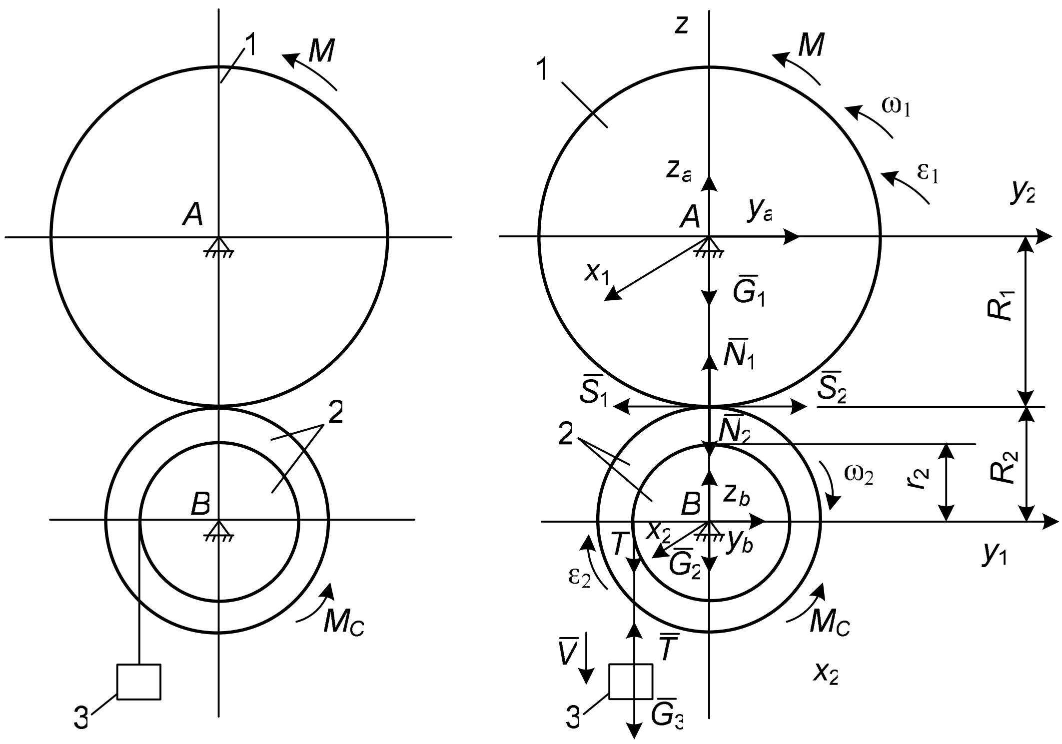


Рис. 11.5. Схема решения задачи 11.2

Решение. К звену 1 механизма приложена сила тяжести $\bar{G}_1$, движущий момент M, составляющие реакции подшипника $\bar{y}_a, \bar{z}_a$, окружное усилие $\bar{S}_1$ и нормальная реакция $\bar{N}_1$ звена 2.

К звену 2 механизма приложена сила тяжести $\bar{G}_2$, момент сил сопротивления M_C, составляющие реакции подшипника $\bar{y}_b, \bar{z}_b$, натяжение нити T, к которой подвешен груз 3, окружное усилие $\bar{S}_2$ и нормальная реакция $\bar{N}_2$ звена 1.

К грузу 3 приложены сила тяжести $\bar{G}_3$ и натяжение нити T.

Очевидно: $\bar{S}_2 = -\bar{S}_1$, $\bar{N}_2 = -\bar{N}_1$ и $\bar{T} = -\bar{T}$.

Составим дифференциальное уравнение вращения звена 1 вокруг неподвижной оси x_1: $\ddot{\varphi}_1 J_{x1} = M_{x1}^e$.

Главный момент M_{x1}^e внешних сил, приложенных к звену 1, относительно оси x_1: $M_{x1}^e = M - S_1 R_1$.

Момент M приводит в движение систему и поэтому принят положительным, а момент, создаваемый усилием S_1, препятствует вращению звена 1 и, следовательно, отрицателен.

Дифференциальное уравнение вращательного движения звена 1 примет вид $\ddot{\varphi}_1 J_{x1} = M_{x1}^e$. Выразим угловое ускорение $\ddot{\varphi}_1$ звена 1 через угловое ускорение $\ddot{\varphi}_2$ звена 2.

Так как $\dfrac{\ddot{\varphi}_1}{\ddot{\varphi}_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$, то $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 \dfrac{R_2}{R_1}$.

Тогда уравнение принимает следующий вид: $\ddot{\varphi}_2 \dfrac{R_2}{R_1} J_{x1} = M - S_1 R_1$.

Для составления дифференциального уравнения вращения вокруг оси x_2 звена 2, к которому подвешен груз 3, применим теорему об изменении кинетического момента:

$$\frac{dK_{x_2}}{dt} = M_{x_2}^e.$$

Кинетический момент системы тел 2–3 относительно оси x_2 равен

$$K_{x2} = J_{x2}\omega_2 + m_3 v r_2,$$

где $J_{x2}\omega_2$ – кинетический момент звена 2, вращающегося с угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси x_2;

$m_3 v r_2$ – момент количества движения груза 3, движущегося поступательно со скоростью v.

Так как $v = \omega_2 r_2$, то

$$K_{x2} = (J_{x_2} + m_3 r_2^2)\omega_2 = J_{np_{x2}} \dot{\varphi}_2,$$

где $J_{np_{x2}} = J_{x2} + m_3 r_2^2$ – приведенный к оси x_2 момент инерции системы тел 2–3.

Главный момент $M_{x_2}^e = S_2 R_2 - G_3 r_3 - M_C$.

Момент, создаваемый усилием $\bar{S}_2$, приводит к движению системы тел 2–3 и поэтому принят положительным, а момент силы тяжести груза $\bar{G}_3$ и момент сил сопротивления M_C препятствуют движению системы и, следовательно, являются отрицательными.

Таким образом, $\dfrac{d}{dt}(J_{\text{пр}_{x2}}\dot{\varphi}_2) = S_2R_2 - G_3r_3 - M_C$.

Получаем следующее дифференциальное уравнение вращения звена 2:

$$J_{\text{пр}_{x2}}\ddot{\varphi}_2 = S_2R_2 - G_3r_3 - M_C.$$

В выведенной системе уравнений неизвестны усилия $S_1 = S_2 = S$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}_2$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_2 \cdot \dfrac{R_2}{R_1} \cdot J_{x1} = M - S_1R_1 \\ J_{\text{пр}_{x2}}\ddot{\varphi}_2 = S_2R_2 - G_3r_3 - M_C \end{cases} \left| \begin{matrix} R_2 \\ \\ R_1 \end{matrix} \right. .$$

Исключим S, для чего первое уравнение этой системы умножим на R_2, второе – на R_1 и сложим соответствующие части уравнений:

$$\left(J_{x1} \cdot \frac{R_2^{\;2}}{R_1} + J_{\text{пр}_{x2}} \cdot R_1 \right) \cdot \ddot{\varphi}_2 = MR_2 - \left(G_3r_3 + M_C \right) R_1,$$

отсюда

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{MR_1R_2 - \left(G_3r_3 + M_C \right) R_1^{\;2}}{J_{x1}R_2^{\;2} + J_{\text{пр}_{x2}} \cdot R_1^{\;2}}.$$

Данное выражение определяет в общем виде угловое ускорение звена 2 механизма.

Учитывая исходные данные, найдем

$$J_{x1} = m_1 i^2_{x1} = 100\,(0{,}2 \cdot \sqrt{2}\,)^2 = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,\ J_{\text{пр}x2} = J_{x2} + m_3 r_2^{\;2} =$$
$$= m_2 i^2_{x2} + m_3 i_2^{\;2} = 150 \cdot 0{,}3^2 + 400 \cdot 0{,}2^2 = 29{,}5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Из выражения для $\ddot{\varphi}_2$ получим

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{MR_1R_2 - \left(G_3r_3 + M_C \right) R_1^2}{J_{x1}R_2^2 + J_{np_{x2}} \cdot R_1^2} = 4{,}034t + 0{,}4597,\ \text{с}^{-2}.$$

Интегрируем это выражение дважды:

$$\dot{\varphi}_2 = 2{,}017t^2 + 0{,}4597t + C_1;\ \varphi_2 = 0{,}672t^3 + 0{,}230t^2 + C_1t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия задачи при $t = 0$; $\varphi_{2_0} = 0$:

$$\dot{\varphi}_{2_0} = \omega_{2_0} = \omega_{1_0} \cdot R_1 / R_2 = 2 \cdot 60 / 40 = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, $\dot{\varphi}_{2_0} = C_1$; $\varphi_{2_0} = C_2$, т. е. $C_1 = 3$ с$^{-1}$, $C_2 = 0$.

Уравнение угловой скорости звена 2 имеет следующий вид:

$$\dot{\varphi} = 2{,}017t^2 + 0{,}4597t + 3, \text{ с}^{-1}.$$

Искомое уравнение вращательного движения звена 2 имеет вид

$$\varphi_2 = 0{,}672t^3 + 0{,}230t^2 + 3t, \text{ рад}.$$

Окружное усилие S при $t = 1$ с можно определить из уравнения

$$S = S_2 = \frac{J_{\text{пр}_{x2}} \cdot \varphi_2 + G_3 r_2 - M_C}{R_2}.$$

$$S = \frac{29{,}5 \cdot (4{,}034 \cdot 1 + 0{,}4597) + 400 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2 + 200}{0{,}4} = 7295 \text{ Н}.$$

Для определения натяжения нити T составим дифференциальное уравнение вращения звена 2 (рис. 11.6) в следующем виде:

$$J_{x2}\ddot{\varphi}_2 = S_2 R_2 - T r_2 - M_C,$$

из которого

$$T = \frac{S_2 R_2 - M_C - J_{x2}\ddot{\varphi}_2}{r_2}, \text{ при } t = 1 \text{ с}.$$

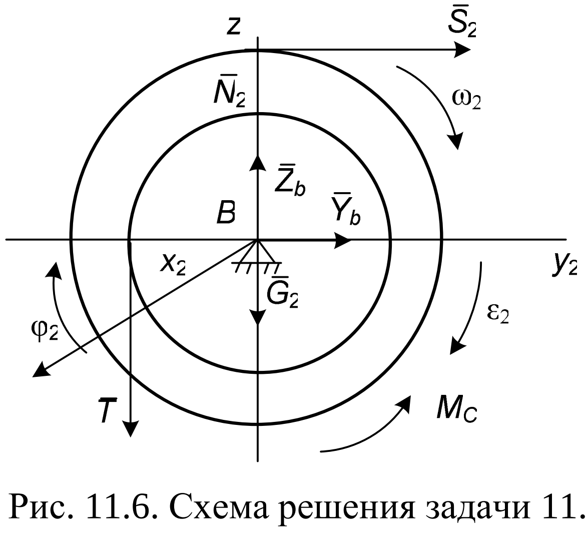


Рис. 11.6. Схема решения задачи 11.2

Таким образом, T будет равно

$$T = \frac{7295 \cdot 0{,}4 - 2000 - 13{,}5 \cdot (4{,}0334 \cdot 1 + 0{,}4597)}{0{,}2} = 4285 \text{ Н}.$$

Контрольная задача 11.3

Данная задача решается с применением теоремы об изменении кинетической энергии механической системы. Прежде всего требуется определить систему, т. е. перечислить те тела, которые включены в состав системы. Затем нужно изобразить систему в произвольный момент времени, показать все силы (заданные и реакции связей), действующие на тела системы, определить скорости тел и перемещения точек приложения сил. После этого необходимо вычислить кинетическую энергию системы в начальном и конечном положениях, вычислить работу всех сил на заданных перемещениях и подставить полученные результаты в формулу, выражающую теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной (интегральной) форме. Исходные данные приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.3

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра			Значения 2-й цифры шифра			Значения 3-й цифры шифра		
	r, см	S, м	M, Н · м	Силы, кН			Номер схемы (рис. 11.7)	α, град	f
				P	Q	F			
1	12	2,1	120	1,1	3,1	8,1 + 0,5S	1	30	0,06
2	14	2,2	140	1,2	3,2	8,2 + 0,4S	2	45	0,07
3	16	2,3	160	1,3	3,3	8,3 + 0,3S	3	60	0,08
4	18	2,4	180	1,4	3,4	8,4 + 0,2S	4	30	0,09
5	20	2,5	200	1,5	3,5	8,5 + 0,1S	5	45	0,10
6	22	2,6	220	1,6	3,6	8,6 + 0,5S	6	60	0,06
7	24	2,7	240	1,7	3,7	8,7 + 0,4S	7	30	0,07
8	26	2,8	260	1,8	3,8	8,8 + 0,3S	8	45	0,08
9	28	2,9	280	1,9	3,9	8,9 + 0,2S	9	60	0,09
0	30	3,0	300	2,0	4,0	9,0 + 0,1S	10	30	0,10

Условие

Однородный каток B весом Q и радиусом R соединен гибкой нерастяжимой и невесомой нитью с грузом A весом P (см. рис. 11.7).

Нить переброшена через невесомый блок O радиусом r. К оси С катка (см. рис. 11.7, схемы 1–5) или к грузу A (см. рис.11.7, схемы 6–8) или к свободному концу нити (см. рис.11.7, схемы 9,10) приложена сила F, линейно зависящая от величины перемещения S. Каток катится без скольжения; коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f, момент сил сопротивления в подшипнике блока M. Определить скорость груза A, когда он переместится на величину S. В начальный момент система находилась в покое.

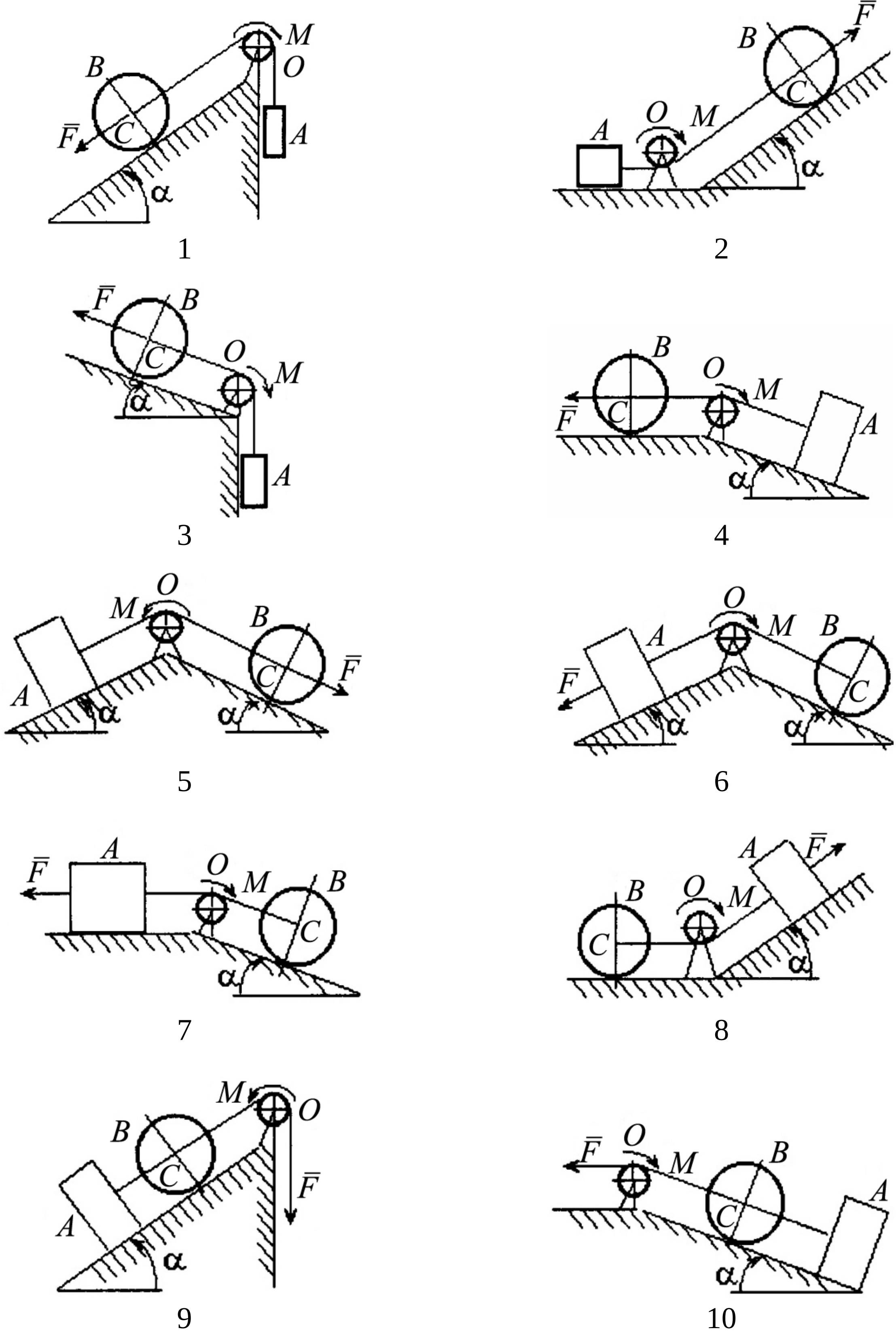


Рис. 11.7. Схемы к задаче 11.3

Пример решения

Условие. Однородный каток B весом Q = 4 кН и радиусом R и груз A весом P = 2 кН, соединенные гибкой нерастяжимой и невесомой нитью, помещены на шероховатую поверхность, наклоненную к горизонту под углом α = 30° (рис. 11.8). Нить переброшена через невесомый блок O радиусом 30 см.

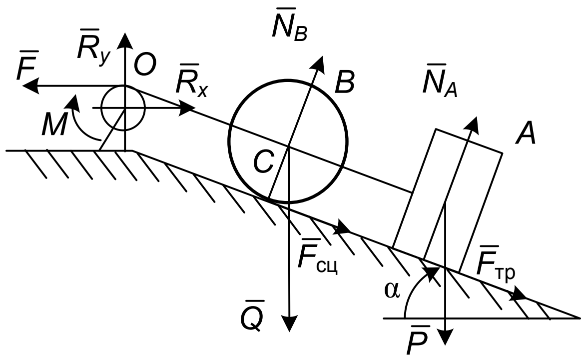


Рис. 11.8. Схема решения задачи 11.3

К свободному концу нити приложена сила F, линейно зависящая от величины перемещения S: F = 9,0 + 0,15S, кН. Каток катится без скольжения; коэффициент трения скольжения груза о плоскость f = 0,1, момент сил сопротивления в подшипнике блока M = 300 Н · м. Определить скорость груза A, когда он переместится на величину S = 3 м. В начальный момент система находилась в покое.

Решение. Формула, выражающая теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной (интегральной) форме, имеет следующий вид:

$$T - T_0 = \sum A\left[\bar{F}_S^{(e)}\right] + \sum A\left[\bar{F}_S^{(i)}\right],$$

где T, T_0 – кинетическая энергия системы в конечный и начальный моменты времени соответственно;

$\sum A\left[\bar{F}_S^{(e)}\right]$, $\sum A\left[\bar{F}_S^{(i)}\right]$ – суммы работ всех внешних и внутренних сил соответственно, действующих в данной системе.

В рассматриваемой задаче система состоит из катка, груза, блока и нити. Система сил, действующих на систему, включает активные силы Q, P, F, реакции связей N_A, N_B, $F_{сц}$, $F_{тр}$, R_x, R_y и момент трения в блоке M.

Найдем сумму работ всех внешних сил системы на соответствующих перемещениях точек их приложения:

$$\sum_{s=1}^{8} A\left[\bar{F}_S^{(e)}\right] = A(\bar{F}) + A(\bar{P}) + A(\bar{Q}) + A(\bar{N}A) + A(\bar{N}B) + A(\bar{F}_{\text{сц}}) + A(\bar{F}_{\text{тр}}) + A(M).$$

Работы сил N_A и N_B равны нулю, так как направления этих сил составляют прямой угол с направлениями перемещений точек их приложения. Работа силы сцепления $F_{\text{сц}}$ и работы реакций R_x и R_y равны нулю, так как эти силы приложены к неподвижным точкам. Работы сил F, P, Q, $F_{\text{тр}}$ и пары сил с моментом M определим следующим образом:

$$A(\bar{F}) = \int_0^S F(s)ds = \int_0^S (9{,}0 + 0{,}1S)dS = 9 \cdot S + 0{,}05 \cdot S^2;$$

$$A(\bar{P}) = -P \cdot S \cdot \sin\alpha;$$

$$A(\bar{Q}) = -Q \cdot S \cdot \sin\alpha;$$

$$A(\bar{F}_{\text{тр}}) = -f \cdot P \cdot S \cdot \cos\alpha;$$

$$A(M) = -M \cdot \varphi = -M \cdot \frac{S}{r}.$$

После суммирования получим

$$\sum A\left[\bar{F}_S^{(e)}\right] = S\left[9 + 0{,}05S - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Q\sin\alpha - \frac{M}{r}\right].$$

Рассматриваемая механическая система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных идеальной нитью. Для таких систем с идеальными связями сумма работ всех внутренних сил равна нулю:

$$\sum A\left[\bar{F}_S^{(i)}\right] = 0.$$

Рассчитаем кинетическую энергию системы в начальном и конечном положениях.

По условию задачи система в начальный момент находилась в покое, следовательно, ее кинетическая энергия в этот момент равна нулю $T_0 = 0$.

Кинетическая энергия T груза A, движущегося поступательно, равна

$$T_A = \frac{m_A \cdot v_A^2}{2},$$

где $m_A = \dfrac{P}{g}$ – масса груза A;

ν_A – скорость груза.

Кинетическая энергия T катка B, совершающего плоское движение, равна

$$T_B = \frac{m_B v_C^2}{2} + \frac{J_{zC}\omega_B^2}{2},$$

где $m_B = \dfrac{Q}{g}$ – масса катка B;

v_C – скорость центра масс C катка, $v_C = v_A$;

$J_{zC} = \dfrac{m_B R_2}{2}$ – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс;

ω_B – угловая скорость катка, $\omega_B = \dfrac{v_C}{R}$.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех тел, входящих в нее:

$$T = \frac{v_A^2}{2g}(P + 1{,}5Q).$$

Подставляя полученные выражения в формулу, выражающую теорему об изменении кинетической энергии системы, получим

$$\frac{v_A^2}{2g}(P + 1{,}5Q) = S\left[9 + 0{,}05S - P\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right) - Q\sin\alpha - \frac{M}{r}\right].$$

Отсюда следует, что искомая скорость груза A в момент, когда он переместится на расстояние 3 м, равна

$$v_A = \sqrt{2\cdot g\cdot S\cdot\frac{9 + 0{,}05S - P\cdot\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right) - Q\sin\alpha - \dfrac{M}{r}}{P + 1{,}5Q}} =$$

$$= \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 3\cdot\frac{9 + 0{,}05\cdot 3 - 2\cdot\left(0{,}5 + 0{,}10\cdot 0{,}866\right) - 4\cdot 0{,}5 - \dfrac{0{,}3}{0{,}3}}{2 + 1{,}5\cdot 4}} = 6{,}05 \text{ м/с}.$$

Глава 12. Принципы динамики

12.1. Принцип Даламбера для точки и механической системы

Принцип Даламбера для материальной точки: при движении материальной точки S активные силы $\bar{F}_S^a$ и реакции связей $\bar{R}$ вместе с силой инерции точки $\bar{\Phi}_S^u$ образуют равновесную систему сил.

Пусть на материальную точку с массой m действует система активных сил, равнодействующую которой обозначим $\bar{F}_S^a$, и реакции связи $\bar{R}$ (если точка является несвободной). Под действием всех этих сил точка будет двигаться по отношению к инерциальной системе отсчета с некоторым ускорением $\bar{a}$.

Величину $\bar{\Phi}_S^u$ называют *силой инерции точки.* $\bar{\Phi}_S^u = -m \cdot \bar{a}$.

Принцип Даламбера есть условие относительного равновесия для сил в собственной системе отсчета:

$$\bar{F}_S^a + \bar{R} + \bar{\Phi}_S^u = 0.$$

Принцип Даламбера для системы материальных точек: если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить действующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики [4].

Реакции в связях от тела, движущегося с ускорением, с учетом сил инерции будут называться *динамическими реакциями*.

12.2. Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики

При решении задачи на равновесие системы тел следует составлять уравнения равновесия для каждого тела, даже только при одной неизвестной реакции.

Возникает вопрос, существует ли такой способ, который позволил бы составить уравнения только с теми неизвестными, которые требуется найти, и так, чтобы другие неизвестные в эти уравнения не входили. В рамках аналитической механики такой способ создан трудами ученых нескольких поколений. Он называется *принципом возможных перемещений* (иногда: виртуальных перемещений, виртуальных скоростей, виртуальных работ), принципом – потому что некоторые ученые считали его истиной, не требующей доказательств.

Связи и возможные перемещения. Всякую точку M (x, y, z) называют свободной точкой, если ее можно переместить, дав ее координатам x, y, z малые приращения ∂x, ∂y, ∂z произвольного знака и величины, и никакие тела не препятствуют этому перемещению. *Свободная точка* обладает шестью степенями свободы. Точку называют *несвободной*, если ее перемещение ограничено какими-либо условиями.

Ограничения, стесняющие движение точки, называют *связями*.

Связи всегда осуществляются посредством других материальных тел. Ограничивать можно не только перемещения, но и вообще движение точек (например, может быть ограничение скорости).

Связи могут быть наложены не только на точки, но и на твердые тела. Если связи не наложены на твердое тело, то оно является свободным и обладает шестью степенями свободы.

Связи классифицируют в соответствии с характером математических соотношений, которыми они выражаются.

Связь называется *голономной* (конечной), если она выражается конечным (недифференциальным) уравнением, связывающим координаты точек системы.

Для одной точки уравнение голономной связи имеет вид $f(x, y, z) = 0$.

Это означает, что точка при движении должна находиться на некоторой поверхности, выражаемой этим уравнением. Связь будет голономной и тогда, когда она выражается интегрируемым дифференциальным уравнением.

Если время t не входит явно в уравнение, т. е. связь не изменяется со временем, то такая связь называется *стационарной*.

$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$ – голономная стационарная связь.

$x^2 + y^2 + (z - 2t)^2 = 2 + \sin t$ – голономная нестационарная связь.

Связь называется *двухсторонней* (удерживающей), если она выражается уравнением, и *односторонней* (неудерживающей), если она выражается уравнением, соединенным с неравенством.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2t = 0$ – удерживающая связь.

$x^2 + y^2 + (z - 2t)^2 = (2 + \sin t) < 0$ – неудерживающая связь.

Например, кольцо на проволоке – удерживающая связь; шарик на столе – неудерживающая связь; подшипник, сферический шарнир – удерживающие связи; нить, рельсы – неудерживающие связи.

Пока неудерживающая связь «напряжена», т. е. во внимание берется знак равенства в материальном выражении связи, она может рассматриваться как удерживающая. Если неудерживающая связь «ослабнет», т. е. в ее материальном выражении будет приниматься во внимание знак неравенства, то с этого момента ее можно считать исчезнувшей и игнорировать ее действие на рассматриваемую точку.

Возможным (виртуальным) перемещением называют воображаемое достаточно малое перемещение, допускаемое в данное мгновение наложенными связями [4], т. е. не нарушающее эти связи. Например, бесконечно малые воображаемые перемещения тела по плоскости.

Следовательно, чтобы сообщить телу возможное перемещение, не нужно прикладывать к нему какие-либо силы, потому что возможные перемещения – воображаемые.

Для возможного перемещения не требуется никакого времени, и оно происходит как бы мгновенно, при фиксированном (постоянном) значении времени t.

Возможное перемещение точки будет иметь обозначение $\partial\overline{r}$ и, соответственно, координаты точки x, y, z получат малые приращения ∂x, ∂y, ∂z, называемые изохронными вариациями координат (изохронные – т. е. при данном значении t (мгновенно)).

Символ ∂ взят для отличия от действительного перемещения $d\overline{r}$.

Отличие дифференцирования функции от изохронного варьирования в том, что при дифференцировании t является переменной величиной, а при варьировании t рассматривается как постоянный параметр.

Среди всех возможных перемещений существует некоторое число k независимых друг от друга перемещений. Тогда прочие перемещения следует выражать через независимые. Если все связи по определению голономные, то k дает какое-либо определенное число степеней свободы.

Независимым возможным перемещениям можно придавать любые значения, в том числе и 0.

При анализе возможных перемещений ∂ величинами более высоких порядков пренебрегают.

Виртуальная работа. Если к точке приложена сила $\overline{F}$, то, сообщив точке возможное перемещение $\partial\overline{r}$, можно подсчитать элементарную работу этой силы на возможном перемещении точки, в этом случае ее называют виртуальной работой [4]:

$$\partial A = F_x \partial x + F_y \partial y + F_z \partial z\,.$$

Для совершения виртуальной работы не требуется ни времени, ни затраты энергии. Виртуальная работа – абстрактное понятие, важное и удобное в использовании в аналитической механике. Понятие виртуальной работы применяется для определения понятия *идеальной связи*: связи называются идеальными, если сумма виртуальных работ их реакций на любом возможном перемещении системы, допускаемом именно этими связями, равна нулю.

Принцип возможных перемещений. Пусть какая-либо механическая система с идеальными связями находится в равновесии, т. е. все точки системы пребывают в равновесии под действием активных сил и идеальных реакций.

Покажем, что в этой системе сумма элементарных работ всех активных сил на всяком возможном перемещении равна нулю.

Рассмотрим произвольную точку S системы. Она находится в равновесии под действием активных сил, равнодействующую которых обозначим через $\bar{F}_S^a$, и идеальных связей, равнодействующую реакции которых обозначим через $\bar{F}_S^y$, так как точка находится в равновесии, то равнодействующая всех приложенных к ней сил равна 0:

$$\bar{F}_S^a + \bar{F}_S^y = 0.$$

Известно, что работа равнодействующей равна сумме работ составляющих сил, а так как равнодействующая всех сил, приложенных к взятой точке, равна нулю, то, следовательно, будет равна нулю и сумма элементарных работ всех приложенных к точке активных сил и реакций, если этой точке сообщить какое-либо возможное перемещение.

При этом точка выбрана произвольно, и сказанное относится ко всем точкам системы.

Дадим системе какое-либо возможное перемещение. Это перемещение выводит систему из первоначального положения, но не нарушает связей. Известно, что сумма работ всех активных сил системы и всех реакций идеальных связей на этом возможном перемещении равна нулю.

Но вторая сумма равенства $\bar{F}_S^a + \bar{F}_S^y = 0$ тождественно равняется нулю, потому что все связи идеальные, следовательно, равна нулю также и первая сумма.

Равенство $\bar{F}_S^a = 0$ выражает *принцип возможных перемещений*: для того чтобы система находилась в равновесии в некотором положении, необходимо, чтобы при любом возможном перемещении сумма виртуальных работ всех активных сил равнялась нулю [4].

Изучение равновесия систем методом возможных перемещений составляет предмет аналитической механики.

При решении задач статики по этому методу удобно определять виртуальную работу по формуле

$$\partial A = F_x \partial x + F_y \partial y + F_z \partial z = 0.$$

Это уравнение называют *общим уравнением статики.*

Принцип Даламбера-Лагранжа: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю [4]:

$$\sum \partial A_S^a + \sum \partial A_S^u = 0.$$

Данное уравнение называют *общим уравнением динамики*.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое силы инерции? Опишите принцип Даламбера для точки и механической системы.

2. Опишите связи и их уравнения. Расскажите о виртуальных и возможных перемещениях системы.

3. Объясните принцип возможных перемещений.

4. Объясните принцип Даламбера-Лагранжа.

5. Опишите общее уравнение динамики.

Контрольная задача

Задача решается с применением принципа Даламбера, позволяющего записать уравнения движения системы в форме уравнений равновесия. Для этого надо на схеме показать активные силы, реакции опор, силу инерции точечного груза и равнодействующую сил инерции стержня *ED* (рис. 12.1); составить уравнения равновесия плоской системы сил в выбранной системе координат и из решения этих уравнений найти требуемые величины. Исходные данные представлены в таблице.

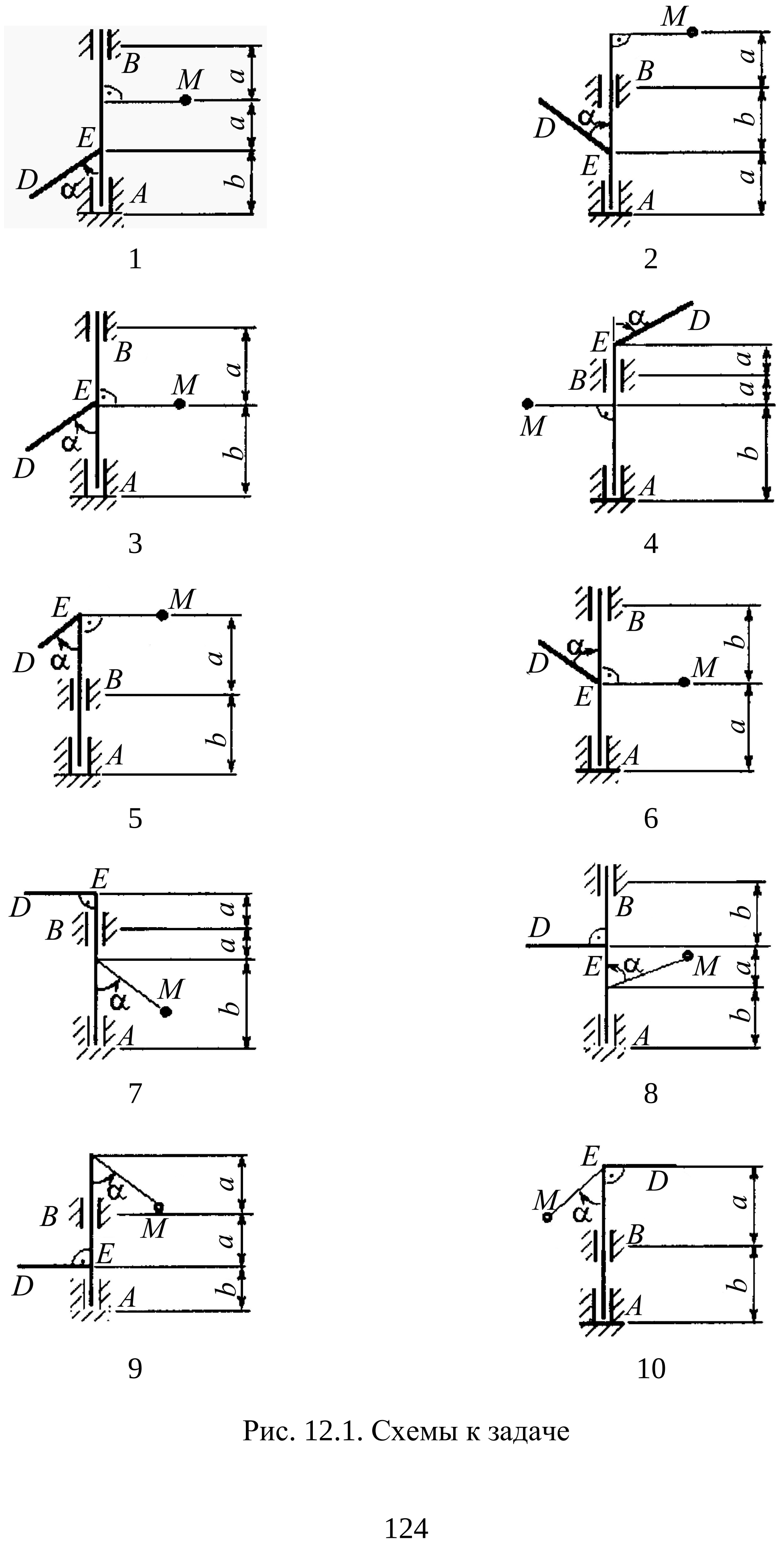


Рис. 12.1. Схемы к задаче

Таблица

Цифра шифра	Значения 1-й цифры шифра				Значения 2-й цифры шифра			Значения 3-й цифры шифра		
	Длина, см				Сила, Н			Номер схемы (рис. 12.1)	α, град	n, об/мин
	a	B	l_1	l_2	Q	P_1	P_2			
1	42	60	12	30	62	12	30	1	30	150
2	44	58	14	28	64	14	28	2	45	300
3	46	56	16	26	66	16	26	3	60	450
4	48	54	18	24	68	18	24	4	90	600
5	50	52	20	22	70	20	22	5	30	750
6	52	50	22	20	72	22	20	6	45	900
7	54	48	24	18	74	24	18	7	60	1050
8	56	46	26	16	76	26	16	8	45	1200
9	58	44	28	14	78	28	14	9	60	1350
0	60	42	30	12	80	30	12	10	30	1500

Условие

К вертикальному валу весом Q жестко приварены невесомый стержень длиной l_1 с точечным грузом M весом P_1 на конце и тонкий однородный стержень ED длиной l_2 весом P_2, лежащие в одной плоскости (см. рис. 12.1).

Определить реакции подпятника A и цилиндрического подшипника B, если вал вращается равномерно с частотой вращения n об/мин.

Пример решения

Условие. К вертикальному валу весом $Q = 64$ Н жестко приварены невесомый стержень длиной $l_1 = 14$ см с точечным грузом M весом $P_1 = 14$ Н на конце и тонкий однородный стержень ED длиной $l_2 = 28$ см весом $P_2 = 28$ Н, расположенные в одной плоскости (рис. 12.2). Определить реакции подпятника A и цилиндрического подшипника B, если вал вращается равномерно с частотой вращения $n = 300$ об/мин, угол $\alpha = 45°$, $a = 44$ см, $b = 58$ см.

Решение. Введем вращающуюся вместе с валом систему координат Axy, как показано на рис. 12.2.

На вал действует плоская система сил: активные силы (Q, P_1, P_2), реакции подпятника A (R_{Ax}, R_{Ay}) и цилиндрического подшипника B (R_{Bx}). Введем в рассмотрение силы инерции Даламбера, которые присоединим к действующим на вал силам и введенным реакциям связей. Поскольку вал вращается с постоянной угловой скоростью, то касательные составляющие сил инерции равны нулю.

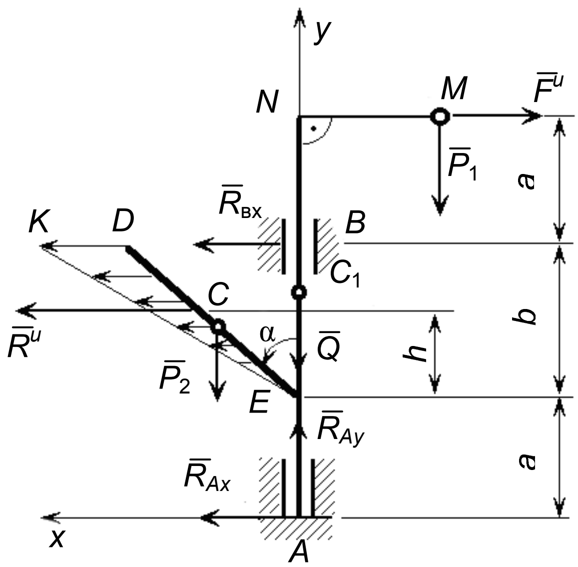


Рис. 12.2. Схема решения задачи

Центробежная сила инерции груза M равна, в свою очередь,

$$F^u = \frac{P_1}{g}\omega^2 l_1,$$

где $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$ – угловая скорость вала.

Сила инерции груза направлена в сторону, противоположную осестремительному ускорению точки M.

Для каждого элемента стержня ED массой Δm центробежная сила инерции определяется по формуле

$$F_k^u = \Delta m \cdot \omega^2 \cdot x,$$

где x – расстояние от элемента до оси вращения Аy;

ω – угловая скорость.

Сила инерции элемента стержня направлена в сторону, противоположную осестремительному ускорению этого элемента.

Равнодействующая $R^и$ этих распределенных по линейному закону параллельных сил проходит через центр тяжести треугольника EDK на расстоянии $h = \frac{2}{3} l_2 \cos\alpha$ и приводится к главному вектору сил инерции стержня ED:

$$R^{и} = \frac{P_2}{g} \cdot a_C = \frac{P_2}{g} \cdot \omega^2 \cdot x_C,$$

где a_C – ускорение центра масс C стержня ED;

x_C – абсцисса центра масс C стержня ED.

Абсциссу центра масс C стержня ED найдем по формуле

$$x_C = \frac{l_2}{2} \sin\alpha.$$

Полученная плоская система сил Q, P_1, P_2, R_{Ax}, R_{Ay}, R_{By}, $F^и$, и $R^и$ в соответствии с принципом Даламбера является уравновешенной, и для нее справедливы следующие уравнения равновесия:

$$\sum F_{sx} = 0;\ \ R_{Ax} + R_{Bx} + R^{и} - F^{и} = 0;$$

$$\sum F_{sy} = 0;\ \ R_{Ay} - P_2 - Q - P_1 = 0;$$

$$\sum M(\bar{F}_s) = 0;\quad P_2 x_C + R^{и}(a+h) + R_{Bx}(a+b) - P_1 l_1 - F^{и}(2a+b) = 0.$$

Решая эту систему трех уравнений с тремя неизвестными реакциями, получим:

$$R_{Ay} = Q + P_1 + P_2 = 64 + 14 + 28 = 106 \text{ Н};$$

$$R_{Bx} = \frac{P_1 l_1 \cdot \left[1 + \frac{(2a+b)}{g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2\right] - \frac{p_2 l_2 \sin\alpha}{2}\left[1 + \frac{1}{g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \left(a + \frac{2 l_2 \cos\alpha}{3}\right)\right]}{a+b} =$$

$$= \frac{14 \cdot 0{,}14\left[1 + \frac{(2 \cdot 0{,}44 + 0{,}58)}{9{,}81}\left(\frac{\pi 300}{30}\right)^2\right] - \frac{28 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}707}{2}}{0{,}44 +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\cdot\left[1 + \frac{1}{9{,}81}\left(\frac{\pi 300}{30}\right)^2 \cdot \left(0{,}44 + \frac{2 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}707)}{3}\right)\right]}{+0{,}58} = 125{,}2 \text{ Н};$$

$$R_{Ax} = \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{g}\left(P_1 l_1 - \frac{P_2 l_2 \sin\alpha}{2}\right) - R_{вх} =$$

$$= \left(\frac{\pi 300}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{9{,}81} \cdot \left(14 \cdot 0{,}14 - \frac{28 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}707}{2}\right) - 125{,}2 = -206{,}8 \text{ Н}.$$

Знак «минус», полученный в результате расчета реакции R_{Ax}, показывает, что истинное направление этой реакции противоположно указанному на рис. 12.2.

Для проверки правильности выполненного решения подсчитаем сумму моментов всех сил относительно любой точки (кроме использованной при составлении уравнений равновесия), например точки B:

$$\sum M_B(\bar{F}_s) = P_2 x_C - R^u(b-h) - R_{Ax}(a+b) - P_1 l_1 - F^u a;$$

$$\sum M_B(\bar{F}_s) = P_2 \frac{l_2 \cdot \sin\alpha}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \cdot \left(b - \frac{2 l_2 \cos\alpha}{3}\right)\right] -$$

$$-P_1 l_1 \cdot \left[1 + \frac{a}{g} \cdot \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2\right] - R_{Ax}(a+b) =$$

$$= 28 \cdot \frac{0,28 \cdot 0,707}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{9,81} \cdot \left(\frac{\pi 300}{30}\right)^2 \cdot \left(0,58 - \frac{2 \cdot 0,28 \cdot 0,707}{3}\right)\right] -$$

$$-14 \cdot 0,14 \cdot \left[1 + \frac{0,44}{9,81} \cdot \left(\frac{\pi 300}{30}\right)^2\right] - 206,8 \cdot (0,44 + 0,58) \cong 0.$$

Полученный результат свидетельствует о правильности определения реакций.

Общие указания по выполнению контрольных работ

Учебная программа по теоретической механике предусматривает изучение общих законов равновесия и движения материальных тел, основных методов динамического расчета точки и твердого тела и систем тел.

Чтобы хорошо усвоить этот курс, нужно не только глубоко изучить его теоретический материал, но и получить твердые навыки в решении задач. Для этого необходимо самостоятельно решить достаточно большое их количество по всем разделам курса из соответствующих сборников и выполнить ряд специальных заданий.

При изучении материала курса по учебному пособию нужно, прежде всего, понять суть каждого излагаемого вопроса.

Для наилучшего усвоения изложенного в пособии материала рекомендуется его изучать в соответствии с содержанием учебного пособия. Сначала следует прочитывать весь текст темы, особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным (непонятные моменты разъясняются в последующем). Если в процессе изучения материала все же остаются затруднения в понимании излагаемой темы, следует вернуться к тем моментам, которые вызывают вопросы, и детально разобраться. Особое внимание при повторном чтении необходимо обратить на формулировки соответствующих определений, теорем и т. п. (в точных формулировках, как правило, каждое слово значимо). При этом не нужно заучивать формулировки дословно, гораздо важнее просто понять их смысл.

При решении индивидуальных заданий, данных в конце некоторых глав учебного пособия, сначала следует разобрать примеры решений соответствующих задач, которые приведены в работе. Особое внимание нужно обратить на методические рекомендации по решению этих задач. И только потом приступать к выполнению индивидуального задания. Для закрепления материала рекомендуется дополнительно решить несколько аналогичных задач из сборника задач И. В. Мещерского.

Все задания контрольных работ составлены на основе Международной системы единиц. После нахождения искомых величин следует записать их размерность.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие требования.

1. Приступать к выполнению контрольных работ во избежание затруднений из-за слабого усвоения материала следует только после изучения соответствующего раздела и решения рекомендованных задач.

2. Контрольные работы имеют индивидуальный характер и должны выполняться в соответствии с учебным шифром (тремя последними цифрами номера зачетной книжки студента), т. е. расчетные схемы и числовые данные каждой задачи выбираются сообразно этому шифру. По цифрам шифра определяются строки, а порядковые номера цифр в шифре указывают столбцы в таблице с данными задачи. На пересечении соответствующих строк и столбцов находятся условия индивидуальных вариантов. Например, для учебного шифра 386 из табл. 2.1 для решения задачи 2.1 следует взять: силу $Q = 300$ Н, условие задачи 1.2, схему 8, углы – $\alpha = 0°$, $\beta = 15°$, $\gamma = 60°$.

3. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради, ручкой с синей или черной пастой, четким почерком. Необходимо оставлять поля 40 мм с левой стороны листа для замечаний рецензента, а после решения каждой задачи – 1–2 чистых листа для указаний рецензента. На обложке тетради должны быть четко написаны следующие данные: название контрольной работы, наименование дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; наименование факультета и специальности; учебный шифр студента; дата отсылки работы; точный почтовый адрес.

4. Перед решением задачи следует указать номер задачи и записать, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи можно не переписывать). Далее необходимо выполнить эскиз с учетом условий решаемого варианта задачи; все углы, действующие силы, количество тел и их расположение на нем должны соответствовать этим условиям. Эскиз должен быть аккуратным и наглядным, его размеры – такими, чтобы можно было ясно показать векторы всех сил, скоростей, ускорений, а также координатные оси и т. д.

5. Решение каждой задачи должно сопровождаться краткими пояснениями и четкими эскизами. Следует избегать многословия и пересказа учебника. Необходимо указывать размерность всех величин и желательно подчеркивать окончательные результаты. Во всех случаях решение должно содержать не более трех значащих цифр, во избежание бесполезной траты времени.

6. Следует напомнить, что работы, выполненные с нарушением данных указаний, не будут проверяться и засчитываться.

7. При чтении текста каждой задачи необходимо учесть, что большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. Следует запомнить, что на рисунках к задачам все линии, параллельные строкам, считаются горизонталь-

ными, а перпендикулярные строкам – вертикальными (это в тексте задач специально не оговаривается). Также по умолчанию считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми; нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят; катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не задано других условий, считаются идеальными. Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблицах P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела 1, а P_2, l_2, r_2 – тела 2 и т. д.

8. По получении проверенной контрольной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и выполнить все указания преподавателя. Если работа не зачтена, следует в кратчайший срок исправить выявленные ошибки и выслать ее вторично на проверку. Все исправления как в зачтенной, так и в незачетной контрольной работе следует поместить в этой же тетради после рецензии преподавателя. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

9. При сдаче зачета и экзамена по курсу необходимо предоставить зачтенные требуемые контрольные работы.

Заключение

В пособии в краткой и доступной форме изложены основные положения курса теоретической механики, являющегося базовым при изучении всех общетехнических дисциплин.

Представлены необходимые знания по всем разделам классического курса «Теоретическая механика» для всех профилей и профилизаций направления 051000 Профессиональное обучение (по отраслям) (ФГОС 3-го поколения).

Приведены примеры решения типовых задач.

В некоторых задачах представлены различные способы их решения.

Составлены задания для выполнения контрольных работ. Разработана схема выбора индивидуального задания, в основу которой положен номер зачетной книжки студента.

Также каждый раздел пособия включает в себя вопросы и задания для самоконтроля, которые помогут студентам проверить усвоение изучаемого материала.

Знания, полученные при изучении курса теоретической механики, позволят учащимся грамотно ставить задачи, находить методы их решения, анализировать результаты. Эти умения, несомненно, пригодятся студентам в дальнейшем профессиональном становлении.

Библиографический список

1. *Бутенин Н. В.* Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин. Санкт-Петербург: Лань, 2009. 736 с.

2. *Мещерский И. В.* Задачи по теоретической механике / И. В. Мещерский. Санкт-Петербург: Лань, 2010. 448 с.

3. *Никитин Н. Н.* Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. Санкт-Петербург: Лань, 2011. 720 с.

4. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С. М. Тарг. 19-е изд., стер. Москва: Высшая школа, 2009. 416 с.

Оглавление

Учебное издание

Лехов Олег Степанович
Туев Михаил Юрьевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор Е. В. Евстигнеева
Компьютерная верстка О. Н. Казанцевой

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета университета

Подписано в печать 28.11.14. Формат 60×84/16. Бумага для множ. аппаратов. Печать плоская. Усл. печ. л. 8,6. Уч.-изд. л. 8,9. Тираж 100 экз. Заказ № ___.
Издательство Российского государственного профессионально-педагогического университета. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.